Оптимальное управление | лекция

copybook

Орлов Михаил Владимирович

01.09.15

ekayumov 289 з/р

1) Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. "Математическая теория оптимальных процессов" // не нужно, сложно
2) Киселёв Ю.Н. "Оптимальное управление"
3) Благодатских В.И. "Введение в оптимальное управление"
4) Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. "ОУ. Линейная теория и приложения".

ldis-s1.cs.msu.ru/moodle_1msu/

любая из 3 книг

$x_1, \dots, x_n$, $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - координаты или другое

$x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ фазовые переменные

$u_1, \dots, u_m$ - переменные управления
$u_i = u_i(t)$, $i = \overline{1,m}$

$x_i(t)$ - имеющиеся ф-ции, к-е можно измерить
$u_i(t)$ - ф-ции, к-е можно изменять

будем считать: $\dot{x}_i = f_i(x, u, t)$ - ОДУ

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$, $\quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$

выбрали $u(t)$, подставили и получили $\dot{x} = f(x, u(t), t) \equiv F(x,t)$

класс допустимых управлений (выбор $u(t)$):
функциональный класс:

I. 1) гладкие диф-е ф-ции // редко получается
2) кусочно непр-е
3) кусочно постоянные
4) измеримые ф-ции

опр $f(t),\ t\in[t_0,t_1]$ – кусочно непр-на, если $\exists\{\tau_i\in[t_0,t_1]\}_{i=1}^{k}$,
τ_i – точки разрыва 1-го рода

но у нас будет $\exists\{\tau_i\in(t_0,t_1)\}_{i=1}^{k}$

$$f(t_0)=f(t_0+0)$$
$$f(t_1)=f(t_1-0)$$
$$f(t_i)=f(\tau_i-0)$$

II. Область управления:

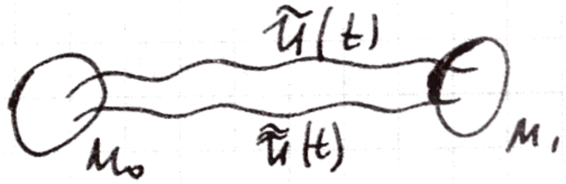
$0\le u_1\le u_{1max}$
$u_{2min}\le u_2\le u_{2max}$ например, может быть шар

$u\in U\subset E^m$ (нужно скалярное произведение)

$U=\{0;1\}$, например.
U – замкнуто

D_u – допустимые управления
выбираем $u(t)\in D_u$, получаем дифф. ур-е.

$\dot{x}=f(t,x,u(t))$
$x(t_0)\in M_0$ – мн-во начальных состояний
$x(t_1)\in M_1$ – мн-во конечных состояний



$u(\cdot)\Longrightarrow x(\cdot)$

(u,x) – допустимый процесс
$(u(t),x(t)),\ t\in[t_0,t_1]$.

$$J(u(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),u(t),t)\,dt\ \to\min$$

↑функционал $\quad u(\cdot)\in D_u$

1. $$\begin{cases} \dot x = f(x,u,t) \\ x(t_0)\in M_0 \\ x(t_1)\in M_1 \\ J(u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x,u,t)\,dt \to \min, \quad u(t)\in D_u \end{cases}$$

t_0, t_1 - может быть и фиксировано, и свободно.
обычно t_0 - фикс, t_1 - свободно.

$f(x,u,t) = Ax + U$ - линейная динамика
Bu, тогда можно другую разм-ть.

$f^0 \equiv 1$

2. $$\begin{cases} \dot x = Ax + u \\ x(t_0)\in M_0 \\ x(t_1)\in M_1 \\ J = \int\limits_{t_0}^{t_1} 1\cdot dt = t_1 - t_0 \end{cases}$$ - минимизируем время перехода

линейная задача быстродействия.

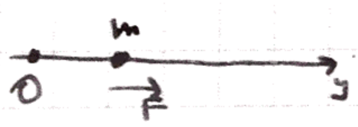
классическая задача вариац. исчисления:

$$\begin{cases} J = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t,x,\dot x)\,dt \to \min \quad x\in C^2[t_0,t_1] \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

$\dot x = u, \quad D_u = C^2[t_0, t_1]$
$U = R$

подход вариац. исчисления проваливается в силу замкнутости U.

примеры задач:

1) 

$y(t_0) = x_{00}$
$\dot y(t_0) = x_{01}$

тележка с двигателем

$y(t_1) = 0$
$\dot y(t_1) = 0$
$|F| \le F_{max}$

$m\ddot{y} = F$

$\ddot{y} = \frac{F}{m} = V$ $\qquad |V| \le \frac{F_{max}}{m} = 1$

$x_1 = y$
$x_2 = \dot{y}$ $\quad \Rightarrow \quad$
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 \\ &\dot{x}_2 = V \\ &x_1(t_0) = x_{00} \\ &x_2(t_0) = x_{01} \\ &x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0 \\ &t_1 - t_0 \to \min_{|V| \le 1} \end{aligned}$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $u_2 = V$

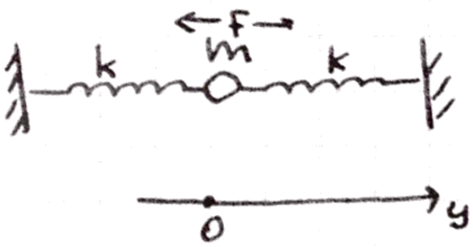
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad u \in U = \{u \in E^2 : u_1 = 0, |u_2| \le 1\}$

$\dot{x} = Ax + u$ $\qquad$ получили задачу 2.

$x(t_0) = \begin{pmatrix} x_{00} \\ x_{01} \end{pmatrix}$
$x(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ (задача о тележке)

$t_1 - t_0 \to \min_{u(t) \in D_u}$

2)



цель: установиться в начале координат

$m\ddot{y} = -ky + F(t)$
$\ddot{y} = -\frac{k}{m} y + \frac{F(t)}{m} = -w^2 y + V$

аналогично задача об успокоении мат. маятника

$|V| \le 1$
$w^2 = 1$ $\quad \Rightarrow \quad \ddot{y} + y = u$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

① Управляемость

(существует ли хотя бы одно управление)

② Теорема о существовании

(сущ-т ли оптимальное)

③ Необходимые усл-я оптимальности

④ Достаточные усл-я оптимальности

⑤ Теорема единственности

$\boxed{08.09.15}$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ t_1 - t_0 \to \min\limits_{u(\cdot) \in \Omega_1} \end{cases}$$

Элементы выпуклого анализа

E^n, $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ $\quad$ $F \subset E^n$

$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ $\quad$ $S_r(a) = \{x \in E^n \mid \|x - a\| \leq r\}$

$\Omega(E^n)$ - мн-во непустых комп

$\rho(x,y) = \|x - y\|$

1) f - пред. точка F, если $\forall \varepsilon > 0$ $S_\varepsilon(f) \cap F \neq \emptyset$.
2) мн-во, сод-е все свои пред. точки наз-ся замкнутым.
3) минимальное замкн. мн-во, сод-е F, наз-ся замыканием $\bar{F}$
если F замкнуто, то $\bar{F} = F$
4) F - огранич., если $\exists R > 0$, $F \subset S_R(0)$
5) F замкнут огранич мн-во наз-ся компактом
$F \in \Omega(E^n)$
6) $|F| = \max\limits_{f \in F} \|f\| = \min\limits_{r > 0} \{\|f\| \leq r\} = \min\limits_{r>0} \{F \subset S_r(0)\}$

7) т. $f \in F$ наз-ся внутр т. F, если $\exists \varepsilon > 0$ $S_\varepsilon(f) \subset F$.

8) $\operatorname{int} F$ – совокупность всех внутр. точек F.

9) $\partial F = \bar{F} \setminus \operatorname{int} F$ – граница F.

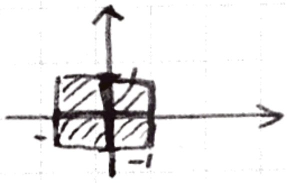
$$[x, y] = \{ z \in E^n;\ z = \lambda x + (1-\lambda) y,\ \lambda \in [0,1] \}$$

10) F – выпуклое, если $\forall$ т. $x, y \in F$: $[x, y] \in F$.

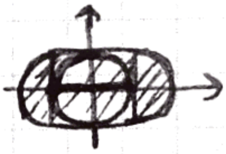
$\operatorname{conv} \Omega(E^n)$ – мн-во непустых выпуклых компактов.

"+": $F = F_1 + F_2 = \{ f \in E^n : f = f_1 + f_2,\ f_1 \in F_1,\ f_2 \in F_2 \}$

<u>пример</u> $F_1 = \{ f \in E^2 : |f_1| \leq 1,\ f_2 = 0 \}$
$F_2 = \{ f \in E^2 : |f_2| \leq 1,\ f_1 = 0 \}$



<u>пример</u> $F_1 = \{ f \in E_2 : |f_1| \leq 1,\ f_2 = 0 \}$
$F_2 = \{ f \in E_2 :\ f \in S_1(0) \}$



<u>утв</u> 1) $F_1, F_2 \in \Omega(E^n) \Rightarrow F_1 + F_2 \in \Omega(E^n)$

2) $F_1, F_2 \in \operatorname{conv} \Omega(E^n) \Rightarrow F_1 + F_2 \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$

$\triangleright$

1) $f = f_1 + f_2 \in F$ – непустота

2) огранич.: $\forall f_1 \in F_1 : \|f_1\| \leq |F_1|$
$\forall f_2 \in F_2 : \|f_2\| \leq |F_2|$
$f = f_1 + f_2 \Rightarrow \|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\| \leq |F_1| + |F_2|$.
$(|F| \leq |F_1| + |F_2|)$
$f \in S_{|F|}(0) \subset S_{|F_1|+|F_2|}(0)$.

3) замкн. $x_k \to x,\ x_k \in F \Rightarrow x_k = f_1^k + f_2^k$

$f_1^k \in F_1,\ f_2^k \in F_2$

$\left.\begin{array}{l} f_1^k \to f_1 \in F_1 \\ f_2^k \to f_2 \in F_2 \end{array}\right\}$ в силу замкн.

$\Rightarrow f_1^k + f_2^k \to f_1 + f_2 = x$.

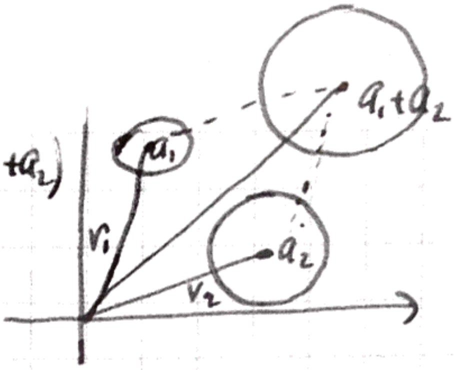
4) выпукл. $x, y \in F = F_1 + F_2$ $\quad x = \overset{\in F_1}{f_1} + \overset{\in F_2}{f_2}$
$y = \underset{\in F_1}{g_1} + \underset{\in F_2}{g_2}$

$\left.\begin{array}{l} [f_1, g_1] \\ [f_2, g_2] \end{array}\right\}$ вып.

$\lambda x + (1-\lambda) y = \lambda f_1 + \lambda f_2 + (1-\lambda)(g_1 + g_2) = \overset{\in F_1}{(\lambda f_1 + (1-\lambda) g_1)} + \ldots = \bar{f}_1 + \bar{f} \ldots$

copybook

<u>пример</u> $S_{r_1}(a_1)+S_{r_2}(a_2)=S_{r_1+r_2}(a_1+a_2)$



$x\in S_{r_1+r_2}(a_1+a_2)$

$\Rightarrow$ $\cancel{a_1+a_2}$ $x=f+g$

$\|f-a_1\|\leq r_1$ $\quad\|f-a_2\|\leq r_2$

$\|x-(a_1+a_2)\|=\|(f-a_1)+(g-a_2)\|\leq\|f-a_1\|+\|g-a_2\|\leq$

$\leq r_1+r_2 \Rightarrow x\in S_{r_1+r_2}(a_1+a_2)$

$\Leftarrow$ $\|x-a_1-a_2\|\leq r_1+r_2$
$\lambda=$

1) $\lambda=0 \Rightarrow x=a_1+a_2 - \in S_{r_1}(a_1)+S_{r_2}(a_2)$

2) $\lambda>0$: $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$: $\lambda_1\leq r_1,\ \lambda_2\leq r_2$

$f=a_1+\frac{\lambda_1}{\lambda}(x-a_1-a_2)$

$g=a_2+\frac{\lambda_2}{\lambda}(x-a_1-a_2)$

$\|f-a_1\|\leq r_1$ $\quad f\in S_{r_1}(a_1)$

$\|g-a_2\|\leq r_2$ $\quad g\in S_{r_2}(a_2)$ $\quad x=f+g\in S_{r_1+r_2}(a_1+a_2)$ $\square$

$S_r(a)=S_r(0)+\{a\}$

"+": 1) $F_1+F_2=F_2+F_1$

2) $(F_1+F_2)+F_3=F_1+(F_2+F_3)$

3) $F_1+\{0\}=F_1$

"×": $\lambda\in\mathbb{R},\ F\subset E^n$

$\lambda F=\{x\in E^n:\ x=\lambda f, f\in F\}$.

<u>утв</u> $F_1\in\Omega(E^n)\Rightarrow\lambda F_1\in\Omega(E^n)$.

$F\in\operatorname{conv}\Omega(E^n)\Rightarrow\lambda F\in\operatorname{conv}\Omega(E^n)$.

$$\lambda S_r(0) = S_{|\lambda| r}(0) \Rightarrow S_r(a) = rS_1(0) + \{a\}$$

"*": 1) $\alpha\beta F = \beta\alpha F$
2) $(\alpha\beta)F = \alpha(\beta F)$
3) $1 \cdot F = F$
4) $(\alpha+\beta)F = \alpha F + \beta F$ – не работает $\quad \alpha=1,\ \beta=-1 \quad F = S_1(0) \quad \underbrace{(1-1)S_1(0)}_{\{0\}} = \underbrace{S_1(0)+(-1)S_1(0)}_{S_1(0)+S_1(0)}$
(5) $\alpha(F+G) = \alpha F + \alpha G$

$\operatorname{conv}\Omega(E^n),\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0 \Rightarrow (\alpha+\beta)F = \alpha F + \beta F.$

$\alpha=0, \beta=0$ – очевидно

$\alpha+\beta > 0$

▷ $\subset$: $x \in (\alpha+\beta)F$

$x = (\alpha+\beta)f,\ f \in F$

$x = \underbrace{\alpha f}_{\in \alpha F} + \underbrace{\beta f}_{\in \beta F}$

$\supset$: $x \in \alpha F + \beta F$

$x = \alpha f + \beta g,\ f, g \in F$

$x = (\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} f + \frac{\beta}{\alpha+\beta} g\right) = \qquad \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1$

$= (\alpha+\beta)\underbrace{(\lambda f + (1-\lambda) g)}_{\in F} \in (\alpha+\beta)F.$ □

Образ множества

$A(n \times n),\ F \subset E^n \qquad A = \lambda E \Rightarrow \lambda F.$

$AF = \{x \in E^n : x = Af,\ f \in F\}$

<u>утв</u> $F \in \Omega(E^n) \Rightarrow AF \in \Omega(E^n)$

$F \in \operatorname{conv}\Omega(E^n) \Rightarrow AF \in \operatorname{conv}\Omega(E^n).$

1) $(AB)F = A(BF)$
2) $EF = F$
3) $(A+B)F = AF + BF$

$F = S_1(0)$
$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow AF = \left\{x \in E^2 : \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 \leq 1\right\} \quad a, b \neq 0$

$a=0, b\neq 0 \Rightarrow AF = \{x \in E^2 : x_1 = 0,\ |x_2| \leq |b|\}$

метрика Хаусдорфа.

copybook

$\Omega(E^n)$

$h(A,B) \equiv h: \min\limits_{r \geq 0} \{ A \subset B + S_r(0) \}, \; B \subset A + S_r(0) \}$

1) $h(A,B) \geq 0, \; = 0 \Leftrightarrow A = B.$

2) $h(A,B) = h(B,A)$

3) $h(A,B) \leq h(A,C) + h(C,B) = h_1 + h_2$

$\triangleright$ $A \subset C + S_{h_1}(0)$ $\qquad B \subset C + S_{h_2}(0)$

$C \subset A + S_{h_1}(0)$ $\qquad C \subset B + S_{h_2}(0)$

$A \subset B + S_{h_2}(0) + S_{h_1}(0) = B + S_{h_1+h_2}(0)$

$B \subset A + S_{h_1}(0) + S_{h_2}(0) = A + S_{h_1+h_2}(0)$

$h(A,B) \leq h_1 + h_2$ — вып-ся как минимум $\square$

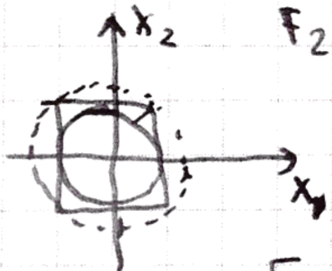
$\boxed{15.09.15}$

$F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$

$h(F_1,F_2) = \min\limits_r (\; F_1 \subset F_2 + S_r(0), F_2 \subset F_1 + S_r(0))$

$F_1 = \{ |x_1| \leq 1, \; |x_2| < 1 \}$

$F_2 = S_1(0)$



$h(F_1, F_2) = \sqrt{2} - 1$

$F_1 = \{0\}$

$F_2 = F$

$\{0\} \subset F + S_r(0)$

$F \subset \{0\} + S_r(0)$

$F \subset S_r(0)$

$h(F, \{0\}) = |F|.$

$h(S_{r_1}(a_1), S_{r_2}(a_2)) = |r_1 - r_2| + \|a_1 - a_2\|.$

опр $[x, y] = \{z \in E^n,\ z = \lambda x + (1-\lambda) y,\ \lambda \in [0,1]\}.$

опр $F \subset E^n$ – выпуклое, если $\forall x, y \in F \Rightarrow [x, y] \subset F$

опр $G \subset E^n$ наз-ся выпуклой оболочкой F, если
1) G – выпукло
2) $F \subset G$.

опр $\operatorname{conv} F \subset E^n$ – минимальная выпуклая оболочка F, если 1) $\operatorname{conv} F$ – выпукл. обол. F
2) $\forall G$ вып. обол. $\operatorname{conv} F \subset G$.

F – выпукла $\Rightarrow \operatorname{conv} F = F$.

$\operatorname{conv} F = \{\sum_{i=1}^{n+1} x_i \lambda_i,\ \lambda_i \geq 0\ \ \sum \lambda_i = 1,\ x_i \in F\}$ – Каратеодори
$F \subset E^n$

теор $\forall F \subset E^n\ \exists \operatorname{conv} F$: $F_0 = F,\ F_1 = \bigcup_{x, y \in F_0} [x, y],\ F_2 = \bigcup_{x, y \in F_1} [x, y], \ldots$

$F_{i+1} = \bigcup_{x, y \in F_i} [x, y], \ldots \quad \operatorname{conv} F = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$

D 1) $\operatorname{conv} F \neq \emptyset$, $F \subset \operatorname{conv} F$
2) $\operatorname{conv} F$ – вып
3) $\operatorname{conv} F$ – мин.

1) св-во монотонности $F \equiv F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset \operatorname{conv} F$
2) $\forall x, y \in \operatorname{conv} F$
$\left.\begin{array}{l} \exists m_1 \geq 0 : x \in F_{m_1} \\ \exists m_2 \geq 0 : y \in F_{m_2} \end{array}\right\} \Rightarrow x, y \in F_m,\ m = \max(m_1, m_2)$
$[x, y] \subset F_{m+1} \subset \operatorname{conv} F$
3) $\forall G$ – вып, $F \subset G$
$F_0 \subset G$
$F_1 \subset G$ (G – вып)
$F_2 \subset G$.
…
$F_{m+1} \subset G$
…
$\bigcup^{\infty} F_i \subset G$

$$F_{m+1} = \bigcup_{x,y\in F_m} [x,y] = \bigcup_{x,y\in F_m} \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda x + (1-\lambda) y\} =$$

$$= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \bigcup_{x,y\in F_m} \{\lambda x + (1-\lambda) y\} = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda F_m + (1-\lambda) F_m\}$$

$\square$

<u>Утв</u> $F\in\Omega(E^n) \Rightarrow \operatorname{conv} F \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$

<u>лемма</u> об отделимости.

пусть $H\subset \operatorname{conv}\Omega(E^n)$, $x_0\notin H$

1) $\exists \psi\neq 0 \in E^n: (h-x_0, \psi)<0, \ \forall h\in H$) $\Leftrightarrow$

2) $\exists \psi_0 \in S: (h-x_0, \psi_0)<0 \ \forall h\in H$

$\triangleright$ $\min\limits_{h\in H} \|h-x_0\| = \|h_0-x_0\|>0 \quad \psi = x_0-h_0.$

$(h-x_0, x_0-h_0)<0 \quad \forall h\in H$

$(h-x_0, h_0-x_0) > 0 \quad \forall h\in H$

$\forall h\in H, \ [h,h_0]\subset H$

$h(\lambda)=\lambda h+(1-\lambda)h_0 \quad \lambda\in[0,1]$

$\|h(\lambda)-x_0\| \geq \|h_0-x_0\|^2$

$\|\lambda h+(1-\lambda)h_0-x_0\|^2 \geq \|h_0-x_0\|$

$\|\lambda(h-h_0)+h_0-\cancel{h}x_0\|^2 \geq \|h_0-x_0\|$

$\lambda^2\|h-h_0\|^2 + 2\lambda(h-h_0, h_0-x_0) + \|h_0-x_0\|^2 \geq \|h_0-x_0\|^2$

$\lambda\in(0,1].$

$\lambda\|h-h_0\|^2 + 2(h-h_0, h_0-x_0) \geq 0.$

$\lambda\to 0+ \quad (h-h_0, h_0-x_0)\geq 0 \ \forall h\in H$

$(h-h_0+h_0-x_0, h_0-x_0) = \overset{\geq 0}{(h-h_0, h_0-x_0)} + \overset{>0}{\|h_0-x_0\|^2} \geq$

$\geq \|h_0-x_0\|^2.$

$\square$

Опорные функции

$F \in \Omega(E_n) \quad \psi \in E^n$

$c(F, \psi) = \max\limits_{f \in F} (f, \psi).$

$\exists R \geqslant 0: \ F \subset S_R(0)$

$c(F, \psi) = \sup\limits_{f \in F} (f, \psi).$

$(f, \psi) = \|f\| \|\psi\| \cdot \cos \varphi$ – ищем макс проекцию

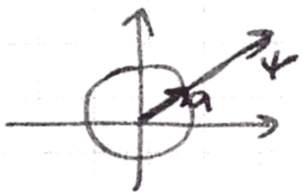
$|c(F, \psi)| \leq |F| \|\psi\|.$

$U(F, \psi) = \{x \in E^n : (x, \psi) = c(F, \psi)\}.$ – опорное мн-во

$F = \{a\}, \ C(F, \psi) = (\psi, a)$

$F = S_1(0) \quad c(F, \psi) = (\psi, \frac{\psi}{\|\psi\|}) =$

$a = \frac{\psi}{\|\psi\|} \quad = \frac{\|\psi\|^2}{\|\psi\|} = \|\psi\|.$



$\cancel{\epsilon F}$

$F = \{x \in E^2 : |x_1| \leq 1, \ |x_2| \leq 1\}$

$c(F, \psi) = \max\limits_{f \in F} (f, \psi) = \max(f_1 \psi_1 + f_2 \psi_2) = \max f_1 \psi_1 +$

$+ \max f_2 \psi_2 = \begin{cases} \psi_1 & \psi_1 > 0 \\ 0 & \psi_1 = 0 \\ -\psi_1 & \psi_1 < 0 \end{cases} + \ldots = |\psi_1| + |\psi_2|$

Свойства опорных функций

$C(F,\psi)$
$F\in\Omega(E^n)$ $\psi\in E^n$
$\Omega(E^n)\times E^n\to E^1$

1) свойство положительной однородности степени 1 по 2-му аргументу

$(f(\lambda x)=\lambda^3 f(x)$ – ст. 3)

$C(F,\lambda\psi)=\lambda C(F,\psi)$.

$\triangleright$ $C(F,\lambda\psi)=\max_{f\in F}(f,\lambda\psi)=\lambda\max(f,\lambda\psi)=\lambda C(F,\psi)$ $\triangleleft$

2) полуаддитивность по 2-му аргументу.

$C(F,\psi_1+\psi_2)\leq C(F,\psi_1)+C(F,\psi_2)$

$\triangleright$ $C(F,\psi_1+\psi_2)=\max_{f\in F}(f,\psi_1+\psi_2)=(f_0,\psi_1+\psi_2)=$

$=(f_0,\psi_1)+(f_0,\psi_2)\leq\max(f,\psi_1)+\max(f,\psi_2)=C(F,\psi_1)+C(F,\psi_2)$ $\triangleleft$

3) $F\subset S_R(0)$ $\exists R$: $C(F,\psi)=C(\bar{F},\psi)$

$\boxed{22.09.15}$

$\Omega(E^n)$, $F\in\Omega(E^n)$, $\psi\in E^n$
$C(F,\psi)=\sup_{f\in F}(f,\psi)=\max_{f\in F}(f,\psi)$

1) $F=S_1(0)$
2) $F=\{x\in E^n,\ \|x\|<1\}$
3) $F=\{x\in E^n,\ \|x\|=1\}$ $C(F,\psi)=\|\psi\|$.

① $C(F,\lambda\psi)=\lambda C(F,\psi)$
② $C(F,\psi_1+\psi_2)\leq C(F,\psi_1)+C(F,\psi_2)$
③ $C(F,\psi)=C(\bar{F},\psi)$.
④ Липшицевость по 2-му аргументу
$|C(F,\psi_1)-C(F,\psi_2)|\leq\|F\|\,\|\psi_1-\psi_2\|$.

$c(F,\psi_1) = \cancel{\ldots}\ c(F,\psi_1-\psi_2+\psi_2) \overset{②}{\leq} c(F,\psi_1-\psi_2) +$
$+ c(F,\psi_2)$

$\Rightarrow c(F,\psi_1) - c(F,\psi_2) \leq c(F,\psi_1-\psi_2) \leq |F|\ \|\psi_1-\psi_2\|.$

$c(F,\psi_2) - c(F,\psi_1) \leq |F|\ \|\psi_1-\psi_2\|$

$\Rightarrow |c(F,\psi_1) - c(F,\psi_2)| \leq |F|\ \|\psi_1-\psi_2\|.$

следств. 1 $c(F,\cdot) : E^{n\times m} \to R^1$ – непр-на по 2 аргументу

опр $f(x), x \in X \in E^n$ – выпукла, если $\forall x_1, x_2 \in X$:
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \quad \forall \lambda \in [0,1].$

следств 2. опорная ф-ция $c(F,\psi)$ выпукла по второму аргументу: $c(F, \lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2) \leq \lambda c(F,\psi_1) + (1-\lambda) c(F,\psi_2).$

⑤ $c(AF,\psi) = c(F, A^T\psi).$ $\quad A^{n\times m}$

$$c(AF,\psi) = \max_{f\in F}(Af,\psi) = \max_{f\in F}(f, A^T\psi) = c(F, A^T\psi)$$

⑥ полож. однородн. ст. 1 опорной ф-ции по 1-му аргументу

$c(\lambda F,\psi) = \lambda c(F,\psi) \quad \forall \lambda \geq 0$

$c(\lambda F,\psi) = c(\lambda E\cdot F,\psi) = \lambda(F, \lambda E\psi) = c(F,\lambda\psi) =$
$= \lambda c(F,\psi).$

⑦ аддитивность опорной ф-ции по 1-му аргументу. $c(F_1+F_2,\psi) = c(F_1,\psi) + c(F_2,\psi).$

$$c(F_1+F_2,\psi) = \max_{f\in F_1+F_2}(f,\psi) = \max_{\substack{f_1\in F_1\\ f_2\in F_2}}(f_1+f_2,\psi) =$$
$$= \max_{\substack{f_1\in F_1\\ f_2\in F_2}}((f_1,\psi)+(f_2,\psi)) = c(F,\psi_1) + c(F,\psi_2)$$

следств 3. $c(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2,\psi) = \lambda_1 c(F_1,\psi) + \lambda_2 c(F,\psi_2).$
$\lambda_1,\lambda_2 \geq 0$

(8) а) $c(F_1 \cup F_2, \psi) = \max\{c(F_1, \psi), c(F_2, \psi)\}$

б) $c(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda, \psi) = \sup\limits_{\lambda\in\Lambda} c(F_\lambda, \psi).$

$$c(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda, \psi) = \sup_{x\in\bigcup\limits_\lambda F_\lambda} (x, \psi) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \sup_{f\in F_\lambda} (f, \psi) = \sup_{\lambda\in\Lambda} c(F_\lambda, \psi).$$

(9) $F \in \Omega(E^n)$, $\psi \in E^n$

$c(F, \psi) = c(\operatorname{conv} F, \psi)$

$$\operatorname{conv} F = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i, \quad F_0 = F, \quad F_{i+1} = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda F_i + (1-\lambda) F_i\}.$$

$\forall m \in \{0, 1, \dots\}$

$c(F_m, \psi) = c(F, \psi)$

$c(\bigcup\limits_{m=0}^{\infty} F_m, \psi) \overset{(8)}{=} \sup\limits_m c(F_m, \psi) = c(F, \psi)$, если

д-во: $m = 0$, $c(F_0, \psi) = c(F, \psi)$

$m \geq 0$ $\quad c(F_m, \psi) = c(F, \psi)$

$$c(F_{m+1}, \psi) = c(\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda F_m + (1-\lambda) F_m\}, \psi) \overset{(8)}{=}$$

$$= \sup_{\lambda\in[0,1]} (c(\lambda F_m + (1-\lambda) F_m, \psi)) =$$

$$= \sup_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda c(F_m, \psi) + (1-\lambda)(F_m, \psi)\} \overset{(3)}{=}$$

$$= \sup_{\lambda\in[0,1]} \{\lambda c(F, \psi) + (1-\lambda) c(F, \psi)\} =$$

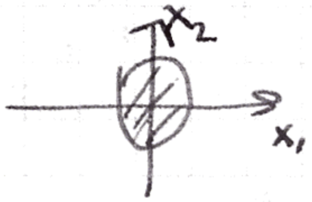
$$= \sup_{\lambda\in[0,1]} c(F, \psi) = c(F, \psi)$$

$\Rightarrow$ верно.

$F = \{v, -v\}$, $v \in E^n$

$c(F, \psi) = \max\{(\psi, v), -(\psi, v)\} = |(\psi, v)|.$

$Э = \{x \in E^n : \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \dots \leq 1\}$



$c(AF, \psi) = c(F, A^*\psi)$

$Э = A \cdot S_1(0)$, $A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (\ni, \psi) = c(AS_1(0), \psi) = c(S_1(0), A\psi) = \|A\psi\|$$

$$= \sqrt{a_1^2\psi_1^2 + \ldots + a_n^2\psi_n^2}$$

$$S_r(a) = \{a\} + rS_1(0)$$

$$c(S_r(a), \psi) = c(\{a\} + rS_1(0), \psi) = c(\{a\}, \psi) + rc(S_1(0), \psi) = $$
$$= (a, \psi) + r\|\psi\|.$$

<u>теор</u> $F \in \Omega(E^n)$, $\psi \in E^n$, $c(F, \psi)$ – оп. ф-ция.

$$\operatorname{conv} F = \bigcap_{\psi \in S} \{x \in E^n : (x, \psi) \leq c(F, \psi)\} = \cap \Pi_\psi = \Pi$$

$\triangleright$ 1) $\operatorname{conv} F \subset \Pi$:

$$x \in \operatorname{conv} F \Rightarrow (x, \psi) \leq \max_{x \in \operatorname{conv}} (x, \psi) = c(\operatorname{conv} F, \psi) \overset{②}{=} c(F, \psi).$$

$\forall \psi \in S$.

$$\Rightarrow \quad x \in \Pi_\psi \quad \Rightarrow \quad x \in \bigcap_{\psi \in S} \Pi_\psi \equiv \Pi \Rightarrow$$

$$\operatorname{conv} F \subset \Pi.$$

2) $\Pi \subset \operatorname{conv} F$:

пусть не выполнено. $\Pi \neq \varnothing$.

$$\exists x_0 \in \Pi, \ x_0 \notin \operatorname{conv} F$$

$$x_0 \notin \operatorname{conv} F \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$$

по теор об отделимости

$$\exists \psi_0 \in S: \ \{(h - x_0, \psi_0) < 0\} \quad \forall h \in H = \operatorname{conv} F.$$

$$(h, \psi_0) < (x_0, \psi_0) \quad \forall h \in \operatorname{conv} F$$

$$\underset{h}{\max}(h, \psi_0) < (x_0, \psi_0)$$

$$\parallel$$

$$c(\operatorname{conv} F, \psi_0) = c(F, \psi_0)$$

$$x_0 \in \Pi = \bigcap_{\psi \in S} \Pi_\psi \Rightarrow x_0 \in \Pi_{\psi_0} \Rightarrow (x_0, \psi_0) \leq c(F, \psi_0)$$

(?!)

$$\Rightarrow \operatorname{conv} F \subset \Pi. \qquad \square$$

следствие $F_1 \in \Omega(E^n),\ F_2 \in \Omega(E^n)$

$$F_1 = F_2 \Leftrightarrow c(F_1,\psi) = c(F_2,\psi),\ \psi \in E^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c(F_1,\psi) = c(F_2,\psi),\ \psi \in S$$

10) $F_1 \subset F_2 \Rightarrow c(F_1,\psi) \le c(F_2,\psi),\ \underset{(\psi\in S)}{\psi \in E^n} \Rightarrow \operatorname{conv} F_1 \subset \operatorname{conv} F_2$

$$F_1 \subset F_2 \Rightarrow c(F_1,\psi) = \max_{f\in F_1}(f,\psi) \le \max_{f\in F_2}(f,\psi) = c(F_2,\psi).$$

$$\operatorname{conv} F_1 = \{x \in E^n : \bigcap_{\psi\in S}\{(x,\psi) \le c(F_1,\psi)\}\} \subset \underbrace{\{x\in E^n : \bigcap_{\psi\in S}\{(x,\psi) \le c(F_2,\psi)\}\}}_{\operatorname{conv} F_2}.$$

следств. F_1, F_2 - $\underset{[\operatorname{conv}\Omega(E^n)]}{\text{вып. компакт}}$, то $F_1 \subset F_2 \Leftrightarrow c(F_1,\psi) \le c(F_2,\psi)$ $\underset{(\psi\in E^n)}{\psi \in S}$

$\boxed{28.09.15}$

$F \in \Omega(E^n)$. $c(F,\psi) = \max_{f\in F}(f,\psi)$

$C(F,\psi) = c(\operatorname{conv} F,\psi),\ \forall \psi \in E^n \Leftrightarrow \forall\psi\in S.$

$\operatorname{conv} F = \bigcap_{\psi\in S}\{x\in E^n,\ (x,\psi) \le c(F,\psi)\}$

$F_1, F_2 \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$. $F_1 = F_2 \Leftrightarrow c(F_1,\psi) = c(F_2,\psi),\ \forall\psi\in E^n.$

пример $\underbrace{S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)}_{F_1} = \underbrace{S_{r_1+r_2}(a_1+a_2)}_{F_2}$, $F_1, F_2 \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$.

$$c(F_1,\psi) = c(S_{r_1}(a_1),\psi) + c(S_{r_2}(a_2),\psi) = (a_1,\psi) + r_1\|\psi\| +$$
$$+ (a_2,\psi) + r_2\|\psi\| = (a_1+a_2,\psi) + (r_1+r_2)\|\psi\|$$

$$c(F_2,\psi) = (a_1+a_2,\psi) + (r_1+r_2)\|\psi\|.$$

10) $F_1 \subset F_2 \Rightarrow c(F_1,\psi) \leq c(F_2,\psi)\ \forall \psi \in E^n \Rightarrow \operatorname{conv} F_1 \subset \operatorname{conv} F_2$

следствие: $F_1, F_2 \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$

$F_1 \subset F_2 \Leftrightarrow c(F_1,\psi) \leq c(F_2,\psi)\ \forall \psi \in E^n.$

11) $f \in F$, $F \in \Omega(E^n)$ $\Rightarrow (f,\psi) \leq c(F,\psi)\ \forall \psi \in E^n \Rightarrow f \in \operatorname{conv} F.$

$\triangleright\ F_1 = \{f\},\ F_2 = F\ \triangleright$

следствие: $F \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$, $f \in E^n$.

$f \in F \Leftrightarrow (f,\psi) \leq c(F,\psi)\ \forall \psi \in E^n.$

12) $0 \in F \Rightarrow c(F,\psi) \geq 0\ \forall \psi \in E^n \Rightarrow 0 \in \operatorname{conv} F.$

следствие: $F \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$ $0 \in F \Leftrightarrow c(F,\psi) \geq 0\ \forall \psi \in E^n.$

13) $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$

$F_1 \cap F_2 \neq \emptyset \Rightarrow c(F_1,\psi) + c(F_2,-\psi) \geq 0\ \forall \psi \in S.$

следствие: $F_1, F_2 \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$

$F_1 \cap F_2 \Leftrightarrow c(F_1,\psi) + c(F_2,-\psi) \geq 0\ \forall \psi \in S.$

$\triangleright\ F_1 \cap F_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists f:\ f \in F_1,\ f \in F_2 \Rightarrow (-f) \in (-F_2).$

$f + (-f) = 0 \in F_1 + (-F_2). \underset{(12)}{\Rightarrow} c(F_1,\psi) + c(-F_2,\psi) \geq 0\ \forall \psi \in S.$

$\Rightarrow c(F_1,\psi) + c(F_2,-\psi) \geq 0.$

$c(F_1,\psi) + c(F_2,-\psi) \geq 0$

$c(\operatorname{conv} F_1,\psi) + c(\operatorname{conv} F_2,-\psi) \geq 0\ \forall \psi \in S$

$c(\operatorname{conv} F_1,\psi) + c(-\operatorname{conv} F_2,\psi) \geq 0\ \forall \psi \in S$

$c(\underbrace{\operatorname{conv} F_1 + (-\operatorname{conv} F_2)}_{\in \operatorname{conv}\Omega(E^n)},\psi) \geq 0\ \forall \psi \in S.$

$\overset{\text{сл из 12}}{\Rightarrow} 0 \in \operatorname{conv} F_1 + (-\operatorname{conv} F_2). \Leftrightarrow \operatorname{conv} F_1 \cap \operatorname{conv} F_2 \neq 0.$

$\square$

пример $F_1 = S_\varepsilon(0)$ $\quad \varepsilon < 1$

$F_2 = S$

$F_1 \cap F_2 = \emptyset.$

$c(S_\varepsilon(0),\psi)+c(S_0,-\psi)=\varepsilon\|\psi\|+\|\psi\|\geq 0$

 $\Rightarrow$ верно в обе стор. только для вып. комп.

$h(F_1,F_2)$: $F_1\subset F_2+S_{h(F_1,F_2)}$, $F_2\subset F_1+S_{h(F_1,F_2)}$

$h(F_1,F_2)=\min\limits_{r\geq 0}\{F_1\subset F_2+S_r(0),\ F_2\subset F_1+S_r(0)\}$

14) Липшицевость опорной ф-ции по 1-му аргументу.
$|c(F_1,\psi)-c(F_2,\psi)|\leq\|\psi\|\,h(F_1,F_2)$.

$\triangleright$ $F_1\subset F_2+S_{h(F_1,F_2)}(0)\overset{(10)}{\Rightarrow} c(F_1,\psi)\leq c(F_2+S_{h(F_1,F_2)}(0),\psi)$

$\Rightarrow c(F_1,\psi)\leq c(F_2,\psi)+h(F_1,F_2)\|\psi\|\quad\forall\psi\in E^n$.

$\Rightarrow c(F_1,\psi)-c(F_2,\psi)\leq\|\psi\|\cdot h(F_1,F_2)$

аналогично наоборот $\Rightarrow |c(F_1,\psi)-c(F_2,\psi)|\leq\|\psi\|\cdot h(F_1,F_2)$. $\square$

следствие: $c(\cdot,\psi):\Omega(E^n)\to E^1$ непр-на по первому аргументу в метрике Хаусдорфа.

следствие (задача) $c(\cdot,\cdot):\Omega(E^n)\times E^n\to E^1$ непр-на по совокупности переменных.

$|c(F,\psi)-c(F',\psi')|\to 0\quad h(F,F')+\|\psi-\psi'\|\to 0$

15) $F_1,F_2\in\operatorname{conv}\Omega(E^n)\Rightarrow h(F_1,F_2)=\max\limits_{\psi\in S}|c(F_1,\psi)-c(F_2,\psi)|$

$\triangleright$ $M=\max|c(F_1,\psi)-c(F_2,\psi)|$, $h(F_1,F_2)=M$ -?

из (14) $\forall\psi\in S$: $|c(F_1,\psi)-c(F_2,\psi)|\leq h(F_1,F_2)$

$\Rightarrow$ ~~max~~ $M\leq h(F_1,F_2)$.

$\forall\psi\in S$: $|c(F_1,\psi)-c(F_2,\psi)|\leq M$

$\forall\psi\in E^n,\ \psi\neq 0$: $\left|c\left(F_1,\frac{\psi}{\|\psi\|}\right)-c\left(F_2,\frac{\psi}{\|\psi\|}\right)\right|\leq M$

$\frac{\psi}{\|\psi\|}\in S\quad |c(F_1,\psi)-c(F_2,\psi)|\leq M\|\psi\|.\ \forall\psi\in E^n$.

$-M\|\psi\|\leq c(F_1,\psi)-c(F_2,\psi)\leq M\|\psi\|$

$c(F_1,\psi)\leq c(F_2,\psi)+M\|\psi\|\overset{(10)}{\Rightarrow} F_1\subset F_2+S_M(0)$

$c(F_2,\psi)\leq c(F_1,\psi)+M\|\psi\|\quad F_2\subset F_1+S_M(0)$.

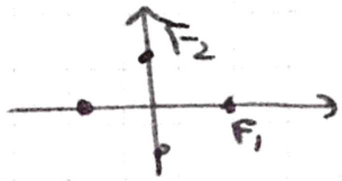
$\Rightarrow M \geq h(F_1, F_2). \Rightarrow M = h(F_1, F_2).$ □

пример $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$.

$$h(\mathrm{conv}\, F_1, \mathrm{conv}\, F_2) = \max_{\psi \in S} |c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi)| \leq h(F_1, F_2)$$

$F_1 = \{(1,0), (-1,0)\}$ $v, -v$

$F_2 = \{(0,1), (0,-1)\}$ $w, -w$



$$h(F_1, F_2) = \sqrt{2}$$

$$h(\mathrm{conv}\, F_1, \mathrm{conv}\, F_2) = \max_{\psi \in S} |c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi)| =$$

$$= \max_{\psi \in S} \big||\psi_1| - |\psi_2|\big| = 1 < \sqrt{2}.$$

$F_1 = S_{r_1}(a_1)$ $\quad h(F_1, F_2) = \|a_1 - a_2\| + |r_1 - r_2|.$

$F_2 = S_{r_2}(a_2)$

но технически сложно

$$h(F_1, F_2) = \max_{\psi \in S} |c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi)| =$$

$$= \max_{\psi \in S} |(a_1, \psi) + r_1 \|\psi\| - (a_2, \psi) - r_2 \|\psi\|| =$$

$$= \max_{\psi \in S} |(a_1 - a_2, \psi) + \|\psi\| (r_1 - r_2)|.$$

$$\psi = \frac{a_1 - a_2}{\|a_1 - a_2\|} \cdot \mathrm{sgn}(r_1 - r_2)$$

Многозначные отображения

опр $F(\cdot): E^1 \to \Omega(E^n)$ — м.о.

пример $F(t) = t \cdot \{-1, 1\}$.

опр1 $F(t): E^1 \to \Omega(E^n)$ — непр в t_0, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$: $|t - t_0| < \delta \Rightarrow h(F(t), F(t_0)) \leq \varepsilon$.

Опр 2 $F(t): E^1 \to \Omega(E^n)$ измеримо, если $\forall \varepsilon > 0$ $\forall K \in \Omega(E^n)$

$\{t : h(F(t), K) < \varepsilon\}$ - измеримо.

Опр 3 $f(t): E^1 \to E^n$ наз-ся однозначной ветвью мн-го отобр-я $F(t): E^1 \to \Omega(E^n)$, если $\forall t: f(t) \in F(t)$.

пример $F(t) = \begin{cases} \{1\}, & t<0 \\ [-1,1], & t=0 \\ \{-1\} & t>0 \end{cases}$

нет непр ветви

$F(t) = \begin{cases} [-1,1], & t\neq 0 \\ \{0\}, & t=0 \end{cases}$

$f(t) = \sin(t)$ - ~~есть~~ непр-я ветвь.

$\boxed{06.10.15}$

$F(t): E^1 \to \Omega(E^n)$

Опр $F(t): E^1 \to \Omega(E^n)$ непр. в t_0, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall t: |t - t_0| < \delta: h(F(t), F(t_0)) \leq \varepsilon$.

Утв 1 $F(t)$ непр по $t \Rightarrow C(F(t), \psi)$ непр по t равн-но по $\psi \in S$ $\Rightarrow \operatorname{conv} F(t)$ непр-но.

$\triangleright$ $|c(F(t), \psi) - c(F(t_0), \psi)| \leq \|\psi\| h(F(t), F(t_0)) \overset{\psi\in S}{=} h(F(t), F(t_0)) \underset{t\to t_0}{\to} 0$

$h(\operatorname{conv} F(t), \operatorname{conv} F(t_0)) = \max\limits_{\psi \in S} |c(F(t), \psi) - c(F(t_0), \psi)| \underset{t \to t_0}{\to} 0$

$\square$

Утв 2 $F(t)$ - мн. отобр., $\operatorname{conv} F(t)$ непр-но $\Leftrightarrow c(F(t), \psi)$ непр-на по t при $\forall$ фикс $\psi \in E^n$

$\triangleright$ $\Rightarrow$ $c(F(t), \psi)$ - непр. по t равн-но $\psi \in S$ $\Rightarrow c(F(t), \psi)$ непр-на по t для $\forall$ фикс. $\psi \in E^n$. (очевидно).

(⇐) $c(F(t),\psi)$ - непр по t для $\forall$ фикс $\psi \in E^n$. От противного:

$\exists r>0,\ t_k\to t_0,\ \psi_k\in S,\ k=1,2,\dots\ \ |c(F(t_k),\psi_k)-c(F(t_0),\psi_k)|\ge r$

$\psi_k\in S \Rightarrow \psi_k\to\psi_0\in S$ (можно выделить)

$r\le |c(F(t_k),\psi_k) + c(F(t_k),\psi_0) - c(F(t_k),\psi_0) + c(F(t_0),\psi_0) -$

$- c(F(t_0),\psi_0) - c(F(t_0),\psi_k)| \le$

$\le |c(F(t_k),\psi_k)-c(F(t_k),\psi_0)| + |c(F(t_k),\psi_0)-c(F(t_0),\psi_0)| +$

$+|c(F(t_0),\psi_0)-c(F(t_0),\psi_k)| \le |F(t_k)|\,\underbrace{\|\psi_k-\psi_0\|}_{\to 0} +$

$+\underbrace{|c(F(t_k),\psi_0)-c(F(t_0),\psi_0)|}_{\to 0 \text{ в силу непр-ти}} + \underbrace{|F(t_0)|}_{\text{огр}}\cdot\underbrace{\|\psi_k-\psi_0\|}_{\to 0}$

$\Rightarrow F(t_k)\to+\infty$ (должен быть)

$|F(t_k)| = h(F(t_k),\{0\}) = \max\limits_{\psi\in S} c(F(t_k),\psi) =$

$= c(F(t_k),\varphi_k),\ \varphi_k\in S,\ \varphi_k\to\varphi_0$

$|c(F(t_k),\varphi_k)-c(F(t_k),\varphi_0)| \le |F(t_k)|\,\|\varphi_k-\varphi_0\| =$

$= c(F(t_k),\varphi_k)\cdot\|\varphi_k-\varphi_0\|$

$\Rightarrow (1-\|\varphi_k-\varphi_0\|)\cdot c(F(t_k),\varphi_k)\le c(F(t_k),\varphi_0)$

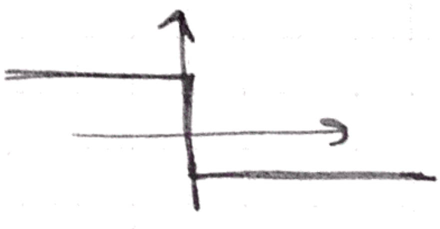
$(1-\|\varphi_k-\varphi_0\|)|F(t_k)| \le c(F(t_k),\varphi_0)\ \ r\le 1$

(?!).

$\square$

пример

$$F(t)=\begin{cases}\{1\}, & t<0\\ [-1,1], & t=0\\ \{-1\}, & t>0\end{cases}$$



$$c(F(t),\psi)=\begin{cases}\psi, & t<0\\ |\psi|, & t=0\\ -\psi, & t<0\end{cases}$$

для $\psi=1$ получаем разр. ф-цию

не опр. было сложно проверять.

пример $F(t) = \begin{cases} [-1,1], & t \neq 0 \\ 0, & t=0 \end{cases}$

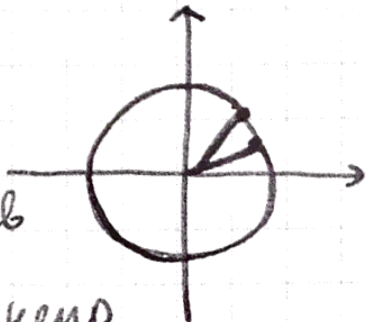
$C(F(t),\psi) = \begin{cases} |\psi| & t \neq 0 \\ 0 & t=0 \end{cases}$ $\psi = 1 \Rightarrow$ разрыв.

пример $F(t): [0,1] \to \Omega(E^n)$

$F(t) = \left\{ x \in E^2, \ x = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \ln t) \\ \sin(\alpha + \ln t) \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} t \le \alpha < 2\pi \\ t \in (0,1] \end{matrix} \right\}$

$F(0) = S$

$f(t)$ – бесконечн. колич. оборотов
$t \to 0$



не явл-ся непр.

опр мн. о. $F(t)$ измеримо по t, если $\forall \varepsilon > 0$ $\forall K \in \Omega(E^n)$ $\{t : h(F(t), K) < \varepsilon\}$ измеримо по Лебегу.

лемма 1 $F(t)$ измеримо по t $\Rightarrow$ $c(F(t),\psi)$ – измеримо по t для $\forall$ фикс $\psi \in E^n$. $\Rightarrow$

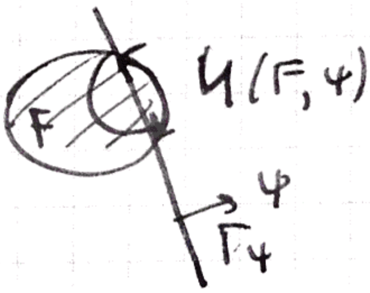
$\Rightarrow$ $\operatorname{conv} F(t)$ измеримо.

(б/д)

опорное мн-во

$F \in \Omega(E^n)$, $c(F,\psi)$, $U(F,\psi) = \{f \in F, \ (f,\psi) = c(F,\psi)\}$

$\Gamma_\psi = \{f \in E^n : (f,\psi) = c(F,\psi)\}$



лемма 2 $\operatorname{conv} U(F,\psi) = \Gamma_\psi \cap \operatorname{conv} F$

(б/д).

лемма 3 $f: E^n \to E^1$ – конечн. знач.
1) $f(\lambda\psi) = \lambda f(\psi)$, $\lambda > 0$
2) $f(\psi_1 + \psi_2) \leq f(\psi_1) + f(\psi_2)$
$\Rightarrow \exists P \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$
$c(P, \psi) = f(\psi)$

(теорема Хана-Банаха)

теор (Филиппова) пусть мн.-отоб. $F(t): E^1 \to \Omega(E^n)$ измеримо по t. Тогда $\exists$ измеримая одн. ветвь $f(t) \in F(t)$, $\forall \psi_0 \neq 0$: $f(t) \in U(F(t), \psi_0)$

$\triangleright$ $F \in \Omega(E^n)$, $\psi_0 \neq 0$, $c(F, \psi_0)$, $\forall \psi \in E^n$:

$$c'(F, \psi_0, \psi) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{c(F, \psi_0 + \alpha\psi) - c(F, \psi_0)}{\alpha}$$

$$c(F, \psi_0) = c(F, \psi_0 + \alpha\psi - \alpha\psi) \leq c(F, \psi_0 + \alpha\psi) + c(F, -\alpha\psi) =$$
$$= c(F, \psi_0 + \alpha\psi) + \alpha c(F, -\psi)$$

$$\frac{c(F, \psi_0 + \alpha\psi) - c(F, \psi_0)}{\alpha} \geq \frac{c(F, \psi_0 + \alpha\psi) - c(F, \psi_0 + \alpha\psi) - \alpha c(F, -\psi)}{\alpha} =$$

$= -c(F, -\psi) \Rightarrow$ огран. снизу.

возьмём $0 < \alpha_2 < \alpha_1$, $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $1 - \lambda = 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \in (0, 1)$.

$$x_1 = \psi_0 + \alpha_1 \psi$$
$$x_2 = \psi_0$$

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\psi_0 + \alpha_1 \psi_1) + \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\psi_0 =$$
$$= \psi_0 + \alpha_2 \psi.$$

$$c(F, \psi_0 + \alpha_2 \psi) = c(F, \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda c(F, x_1) +$$
$$+ (1-\lambda) c(F, x_2) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} c(F, \psi_0 + \alpha_1 \psi) + \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) c(F, \psi_0)$$

$$c(F, \psi_0 + \alpha_2 \psi) - c(F, \psi_0) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(c(F, \psi_0 + \alpha_1 \psi) - c(F, \psi_0)\right).$$

$$: \alpha_2 \Rightarrow \frac{c(F, \psi_0 + \alpha_2 \psi) - c(F, \psi_0)}{\alpha_2} \leq \frac{1}{\alpha_1}\left(c(F, \psi_0 + \alpha_1 \psi) - c(F, \psi_0)\right).$$

$\Rightarrow$ монот. убывает

$\Rightarrow \exists \lim \Rightarrow \exists c'$.

1) $$c'(F,\psi_0,\lambda\psi)=\lim_{\alpha\to0+}\frac{\lambda[c(F,\psi_0+\alpha\lambda\psi)-c(F,\psi_0)]}{\lambda\alpha}=$$

$$\beta=\lambda\alpha\to0$$

$$=\lambda\lim_{\beta\to0+}\frac{c(F,\psi_0+\beta\psi)-c(F,\psi_0)}{\beta}=\lambda c'(F,\psi_0,\psi).$$

2) $$c'(F,\psi_0,\psi_1+\psi_2)=\lim_{\alpha\to0+}\frac{c(F,\psi_0+\alpha(\psi_1+\psi_2))-c(F,\psi_0)}{\alpha}=$$

$$=\lim_{\frac{\alpha}{2}\to0+}\frac{c(F,\psi_0+\frac{\alpha}{2}(\psi_1+\psi_2))-c(F,\psi_0)}{\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\lim_{\frac{\alpha}{2}\to0+}\frac{c(F,\frac{\psi_0+\alpha\psi_1}{2}+\frac{\psi_0+\alpha\psi_2}{2})-c(F,\psi_0)}{\frac{\alpha}{2}}\leq$$

$$\leq\lim_{\alpha\to0+}\frac{c(F,\psi_0+\alpha\psi_1)+c(F,\psi_0+\alpha\psi_2)-2c(F,\psi_0)}{\alpha}=$$

$$=c'(F,\psi_0,\psi_1)+c'(F,\psi_0,\psi_2)$$

т.е. произв. оп. ф-ции облает свойствами оп. ф.
$\Rightarrow$ явл-ся оп. ф-ции

$\boxed{13.10.15}$

1), 2) $\overset{\Lambda 2}{\Rightarrow}$ $c'(F,\psi_0,\psi)=c(F,\psi)$, $P\in\operatorname{conv}\Omega(E^n)$
$P=\operatorname{conv}\mathcal{U}(F,\psi_0)\overset{\Lambda 1}{=}\operatorname{conv}F\cap\Gamma_{\psi_0}$.

$\triangleleft$

$\supseteq$ $\forall x_0\in\operatorname{conv}\mathcal{U}(F,\psi_0)=\operatorname{conv}F\cap\Gamma_{\psi_0}\Rightarrow$
$x_0\in\Gamma_{\psi_0}\Rightarrow(x_0,\psi_0)=c(F,\psi_0)$
$x_0\in\operatorname{conv}F\Rightarrow(x_0,\psi)\leq c(\operatorname{conv}F,\psi)\equiv c(F,\psi)$

$$(x_0,\psi)\overset{\lambda>0}{=}\frac{(x_0,\lambda\psi)}{\lambda}=\frac{(x_0,\psi_0+\lambda\psi)-(x_0,\psi_0)}{\lambda}\leq\frac{c(F,\psi_0+\lambda\psi)-c(F,\psi_0)}{\lambda}$$

$\forall\lambda\Rightarrow\quad\lambda\to0+\quad:\ (x_0,\psi)\leq c'(F,\psi_0,\psi)=c(P,\psi)\ \forall\psi$
$\Rightarrow x_0\in P$

$\subseteq$ $x_0\in P$
$(x_0,\psi_0)\leq c(P,\psi_0)=c'(F,\psi_0,\psi_0)$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} \frac{c(F, \psi_0 + \alpha \psi_0) - c(F, \psi_0)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{(1+\alpha) c(F, \psi_0) - c(F, \psi_0)}{\alpha} = c(F, \psi_0).$$

$$(x_0, -\psi_0) \leq c'(F, \psi_0, -\psi_0) = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{c(F, \psi_0 - \alpha \psi_0) - c(F, \psi_0)}{\alpha} =$$

$$= -c(F, \psi_0)$$

$$*(-1) \Rightarrow \quad (x_0, \psi_0) \geq c(F, \psi_0).$$

а до этого $(x_0, \psi_0) \leq c(F, \psi_0)$.

$$\Rightarrow (x_0, \psi_0) = c(F, \psi_0) \Rightarrow x_0 \in \Gamma_{\psi_0}.$$

$$(x_0, \psi) \leq c'(F, \psi_0, \psi) = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{c(F, \psi_0 + \alpha \psi) - c(F, \psi_0)}{\alpha} \leq$$

$$\leq \lim_{\alpha \to 0+} \frac{c(F, \psi_0) + c(F, \alpha\psi) - c(F, \psi_0)}{\alpha} = c(F, \psi)$$

$$\Rightarrow x_0 \in \operatorname{conv} F \Rightarrow x_0 \in \operatorname{conv} F \cap \Gamma_{\psi_0}$$

□

$\psi_0 \neq 0 \quad F(t) \in \Omega(E^n)$

$e_1, \dots, e_n$ – базис E^n, $\quad e_1 = \psi_0$.

$U_0(t) = F(t) \quad \Rightarrow c(U_0(t), \psi)$ – измер.

$U_1(t) = U(F(t), \psi_0) = U(U_0(t), e_1)$

$U_2(t) = U(U_1(t), e_2)$

$\vdots$

$U_n(t) = U(U_{n-1}(t), e_n)$.

$$c(U_i(t), \psi) = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{c(U_{i-1}(t), e_i + \alpha\psi) - c(U_{i-1}(t), e_i)}{\alpha}$$

измер как предел измер. ф-ций.

$U_1(t) \subset F_{e_1} = \Gamma_{\psi_0} \Rightarrow \dim(U_1(t)) \leq n-1$

$U_2(t) \subset \Gamma_{e_1} \cap \Gamma_{e_2} \Rightarrow \dim(U_2(t)) \leq n-2$

$\vdots$

$U_i(t) \subset \bigcap_{k=1}^{i} \Gamma_{e_k} \Rightarrow \dim(U_i(t)) \leq n-i$

 $\dim U_n(t) \leq n-n=0 \Rightarrow \dim U_n(t) = 0 \Rightarrow$ из 1 точки

$U_n(t) \subset U_{n-1}(t) \subset \ldots \subset U_1(t) \subset U_0(t) = F(t)$

$U_n(t) - \{f(t)\}$, $c(U_n(t), \psi) = (f(t), \psi)$ — измер. (по каждой коорд)

$f(t) \in F(t)$ — первая часть теор Филиппова док-на.

$f(t) \subset U_1(t) = U(F(t), \psi)$

$F(t): E^1 \to \Omega(E^n)$

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t)dt = \{ z \in E^n : z = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt, \ \forall f(t) \in F(t) \}$$

<u>теор</u> (Ляпунова) $F(t): [t_0, t_1] \to \Omega(E^n)$ — измеримо, $|F(t)| \le k(t)$

$k(t)$ — инт. по Лебегу на $[t_0, t_1]$

$$G = \int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt \in \operatorname{conv} \Omega(E^n).$$

▷ н-до: непустота G
ограни G
замкнут G
выпукла G.

1) $F(t)$ — измер $\Rightarrow \exists$ и.в. $f(t) \in F(t)$ $f(t)$ — изм.

$\|f(t)\| \le |F(t)| \le k(t) \Rightarrow f(t)$ — инт по Лебегу на $[t_0, t_1]$.

$\Rightarrow \exists g = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt \in G \Rightarrow G$ — непусто

2) $\forall g \in G \div \exists f(t) \in F(t): \quad g = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt$

$$\|g\| \le \left| \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt \right| \le \int_{t_0}^{t_1} \|f(t)\|dt \le \int_{t_0}^{t_1} |F(t)|dt \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t_1} |k(t)|dt = K \Rightarrow g \text{ — огранич}$$

$$g \in S_K(0).$$

4) $F(t) \in \text{conv}\,\Omega(E^n)$ $\quad \rho_1 = \int_{t_0}^{t_1} f_1(t)dt$

доказ. $\rho_1, \rho_2 \in G, \forall \lambda \in [0,1]$ $\quad \rho_2 = \int_{t_0}^{t_1} f_2(t)dt$

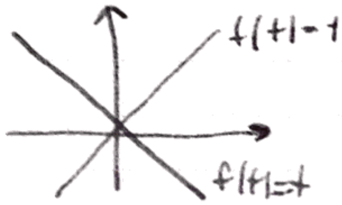
$$\lambda \rho_1 + (1-\lambda)\rho_2 = \lambda \int_{t_0}^{t_1} f_1(t)dt + (1-\lambda)\int_{t_0}^{t_1} f_2(t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{[\lambda f_1(t) + (1-\lambda) f_2(t)]}_{\in F(t)} dt \in G \text{ — выпукла}$$

остальное можно почитать в книге.

$\square$

пример $F(t) = t\{-1, 1\}$ $\quad F(t): [-1, 1] \to \Omega(E^n)$.



$$G = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt$$

$$f_1(t) = t \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} t\,dt = \frac{1}{2}.$$

$$f_2(t) = -t \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} (-t)dt = -\frac{1}{2}.$$

$$G \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

по теор Ляп.: $G = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

$$f(t) = \begin{cases} t, & [0, \alpha] \\ -t, & [\alpha, 1] \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^\alpha t\,dt - \int_\alpha^1 t\,dt = \frac{\alpha^2}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\right) =$$

$$= \alpha^2 - \frac{1}{2}.$$

$\alpha \in [0, 1] \to$ пробегает все от $-\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{2}$.

теор (о внесении знака с.ф. под знак инт-ла)

$F(t): [t_0, t_1] \to \Omega(E^n)$ – измер.

$|F(t)| \le K(t)$, $K(t)$ – инт-ма по Лебегу.

$$c\left(\int_{t_0}^{t_1} F(t)dt, \psi\right) = \int_{t_0}^{t_1} c(F(t), \psi)dt$$

$\triangleright\ |(F(t),\psi)| \leq |F(t)|\,\|\psi\| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{инт-по Лебегу}}}{k(t)}\cdot\|\psi\|$

$\Rightarrow c(F(t),\psi)$ – инт по Лебегу на $[t_0, t_1]$

$\forall \rho \in G = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt \qquad \rho = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt,\ f(t)\in F(t).$

$\forall \psi:$

$(\rho,\psi) = (\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt, \psi) = (\int_{t_0}^{t_1}(f(t),\psi)dt) \leq$

$\leq \int_{t_0}^{t_1} c(F(t),\psi)dt$

$\exists$ одн в. $f^*(t)$: $\qquad (f^*(t),\psi) = c(F(t),\psi)$

$\int_{t_0}^{t_1} c(F(t),\psi)dt = \int_{t_0}^{t_1}(f^*(t),\psi)dt = (\underbrace{\int_{t_0}^{t_1} f^*(t)dt}_{\rho^*}, \psi) = (\rho^*,\psi) \leq$

$\leq c(G,\psi)$

$\square$

<u>пример</u> $F(t): [0,1]\to\Omega(E^n) \qquad F(t) = t\cdot\{-1,1\}$

$G = \int_0^1 F(t)dt$

$c(G,\psi) = \int_0^1 c(F(t),\psi)dt = \int_0^1 c(t\cdot\{-1,1\},\psi)dt =$

$= \int_0^1 t|\psi|dt = |\psi|\int_0^1 t d\psi = \frac{1}{2}|\psi| \Rightarrow c(S_{\frac{1}{2}}(0),\psi)$

$G = S_{\frac{1}{2}}(0) = [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}].$

20.10.15

$F(t): E^1 \to \Omega(E^n)$

$$G = \int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt = \{ z \in E^n : z = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt \ \forall f(t) \in F(t) \}$$

теор (Ляпунова)

$|F(t)| \leq k(t) \Rightarrow G \in \mathrm{conv}\,\Omega(E^n)$

$$C\left(\int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt, \psi\right) = \int_{t_0}^{t_1} C(F(t), \psi)\,dt$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & t^2 \\ \cos t & t^3 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F(t) = A(t) \cdot \{-v, v\}$$

$F(t): [-\pi, \pi] \to \Omega(E^n)$

$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt \equiv G$ — сложно по опр.

$$C(G, \psi) = \int_{-\pi}^{\pi} C(F, \psi)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} c(A(t)\{-v, v\}, \psi)\,dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} c(\{-v, v\}, A^*(t)\psi)\,dt = -\int_{-\pi}^{\pi} |(v, A^*(t), \psi)|\,dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |(A(t)v, \psi)|\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} |\psi_1 \sin t + \psi_2 \cos t|\,dt =$$

$A(t)v = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

$$= \|\psi\| \int_{-\pi}^{\pi} |\cos\alpha \sin t + \sin\alpha \cos t|\,dt =$$

$$= \|\psi\| \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(\alpha + t)|\,dt = 4\|\psi\| = c(S_4(0, \psi)$$

$$\psi = \|\psi\| \frac{\psi}{\|\psi\|} = \|\psi\| \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha \in [0, 2\pi) \qquad \psi_1 = \|\psi\| \cos\alpha, \ \psi_2 = \|\psi\| \sin\alpha.$$

$\Rightarrow G = S_4(0)$

$F(t) = F \in \Omega(E^n) \qquad t \in [t_0, t_1]$

$\int_{t_0}^{t_1} F\,dt \equiv G$

$$c(G, \psi) = \int_{t_0}^{t_1} c(F, \psi)\,dt = (t_1 - t_0)\,c(F, \psi) = c(\mathrm{conv}\,F(t_1 - t_0), \psi)$$

$\forall \psi \in E^n$

$G = (t_1 - t_0)\,\mathrm{conv}\,F$

$F(t): [t_0; t_1] \to \Omega(E^n).$

copybook

$G(\tau)=\int_{t_0}^{\tau} F(t)\,dt:\ \tau\in[t_0,t_1] \Rightarrow G:[t_0,t_1]\to$ сопр к (E^n)

$|F(t)|\le K(t)$ $\quad K(t)$ – инт по Лебегу на $[t_0,t_1]$

<u>утв</u> $G(t)$ – непр по τ

$\forall \psi\in E^n,\ \psi\neq 0.\ C(G(\tau),\psi)=\int_{t_0}^{\tau} c(F(t),\psi)\,dt$

$G(\tau)$ непр-но $\Leftarrow$ непр по τ для $\forall$ фикс ψ

<u>задача ОУ</u>

$\dot x = Ax+u(t)$

$n=1$ $\begin{cases}\dot x = ax+u(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ $\quad u(t)$ – непр

$x(t)=e^{(t-t_0)a}\left(x_0+\int_{t_0}^{t} e^{(t_0-s)a}u(s)\,ds\right)$ – ф-ла Коши.

или $x(t)=e^{(t-t_0)a}x_0+\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)a}u(s)\,ds$

при $n>1$: $x(t)=e^{(t-t_0)A}\left(x_0+\int_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)A}u(s)\,ds\right)$

что с эксп. матрица.

$e^A=E+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\ldots+\frac{1}{k!}A^k+\ldots$

<u>теор</u> (св-ва экспоненциала)

1) $\forall A\ \exists e^A$ $\quad (e^A)_{ij}$ – сх-ся абс.

2) $AB=BA \Rightarrow e^{A+B}=e^Ae^B$

3) $e^{-A}e^A=E$ $\quad (e^A)^{-1}=e^{-A}$

4) e^{tA} – диф-ма по $t \Rightarrow \frac{d}{dt}e^{tA}=Ae^{tA}=e^{tA}A$.

D 1) $\max\limits_{i,j}|a_{ij}|=a$ $\qquad |(A)_{ij}|\le a$

$|(A^2)_{ij}|\le na^2$

$|(A^k)_{ij}|\le n^{k-1}a^k$

$$|(e^A)_{ij}| \le 1 + a + \frac{1}{n}\frac{(na)^2}{2!} + \frac{1}{n}\frac{(na)^3}{3!} + \dots + \frac{1}{n}\frac{(na)^k}{k!} =$$

$$= 1 + a + \frac{1}{n}\left(\frac{(na)^2}{2!} + \dots\right) \text{ — сх — сл}$$

$$\parallel$$

$$1 + \frac{1}{n}(e^{an} - 1).$$

2) $$(A+B)^m = A^m + m BA^{m-1} + \dots + B^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} A^k B^{m-k} =$$

$$= \sum_{k+l=m} \frac{m!}{k!\,l!} A^k B^l$$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \qquad e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$$

$$e^A e^B = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{l!} A^k B^l = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k+l=m} \frac{m!}{k!\,l!} A^k B^l =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(A+B)^m = e^{A+B}$$

3) $e^{-A}e^{A} = e^{-A+A} = e^0 = E.$

4) e^{tA} — сх — сл абс.

$$\frac{d}{dt}\left(E + tA + \dots + \frac{t^k}{k!}A^k + \dots\right) = A + tA^2 + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k + \dots =$$

$$= A(E + tA + \dots) = Ae^{tA} = (E + tA + \dots)A = e^{tA}A$$

$\square$

<u>пример</u> $A = 0 \quad e^{tA} = E$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e^{tA} = E + tA = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E \quad A^3 = A^2A = -A.$$

$$A^4 = A^2A^2 = E \quad e^{tA} = E + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots$$

$e_{11} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots = \cos t$

$e_{12} = t - \frac{t^3}{3!} + \dots = \sin t$ $\qquad e_{22} = \cos t$

$e_{21} = -\sin t$

$$e^{tA} = \cos t\, E + t \sin t\, A$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \Theta.$$

$$e^{tA} = E + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(n)} = u \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & \cdots & 1 & \\ 0 & & & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \cdots & \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = DBD^{-1} \qquad e^{tA} = D e^{tB} D^{-1}.$$

$\boxed{27.10.15}$

$$e^{tA} = E + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \ldots$$

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = E \end{cases} \qquad X(t) = e^{tA}$$

$$(\dot{\bar{e}}_1 | \dot{\bar{e}}_2 | \ldots | \dot{\bar{e}}_n) = A(\bar{e}_1 | \bar{e}_2 | \ldots | \bar{e}_n)$$

$$\dot{x} = Ax$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = e_i \end{cases} \qquad x(t) = e_i \qquad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot i \qquad x(t) = e_i$$

<u>пример</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad x = Ax$

$$x_2(t) = C_2 \qquad x_1(t) = C_2 t + C_1$$

$x_2(0)=0=C_2$
$x_1(0)=C_1=1.$

$\bar{e}_1(t)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix}C_2=1\\C_1=0\end{matrix}$ $\quad \begin{matrix}x_2=1\\x_1=t\end{matrix}$

$$\bar{e}_2=\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$$

$$e^{tA}=(\bar{e}_1,\bar{e}_2)=\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$$

пример $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$ $\quad e^{tA}-?$

$\dot{x}=Ax$

$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\\dot{x}_2=-x_2\end{cases}$ $\quad \begin{matrix}x_1(t)=-C_2e^{-t}+C_1\\x_2(t)=C_2e^{-t}\end{matrix}$

$x(0)=e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$-C_2+C_1=1$
$C_2=0 \Rightarrow C_1=1 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix}-C_2+C_1=0\\C_2=1\Rightarrow C_1=1\end{matrix}$ $\quad \bar{e}_2=\begin{pmatrix}1-e^{-t}\\e^{-t}\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow e^{tA}=\begin{pmatrix}1&1-e^{-t}\\0&e^{-t}\end{pmatrix}.$$

пример $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ $\quad e^{tA}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}&0\\0&e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$

пример $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\quad e^{tA}-?$

$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\\dot{x}_2=x_1\end{cases}$ $\quad \begin{matrix}\ddot{x}_1=x_1\\\lambda^2=1\Rightarrow\lambda=\pm1\end{matrix}$ $\Rightarrow \begin{cases}x_1=C_1e^{t}+C_2e^{-t}\\x_2=C_1e^{t}-C_2e^{-t}\end{cases}$

$$X(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{cases}C_1+C_2=1\\ C_1-C_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1=\frac{1}{2}\\ C_2=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$x_1(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}=\operatorname{ch} t$$
$$x_2(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\operatorname{sh} t \quad \Rightarrow \bar{e}_1(t)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch} t\\ \operatorname{sh} t\end{pmatrix}$$

$$X(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \begin{cases}C_1+C_2=0\\ C_1-C_2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1=\frac{1}{2}\\ C_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$x_1(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\operatorname{sh} t$$
$$x_2(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}=\operatorname{ch} t \quad \Rightarrow \bar{e}_2(t)=\begin{pmatrix}\operatorname{sh} t\\ \operatorname{ch} t\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{tA}=\begin{pmatrix}\operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t\\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t\end{pmatrix}$$

<u>пример</u> $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{\text{коммутируют}}$

$$\Rightarrow e^{A+B}=e^A e^B.$$

<u>лемма</u> (о представлении экспоненциала) $A^{n\times n}$.

$$e^{tA}=\sum_{j=0}^{n-1} p_j(t)A^j$$

$p_j(t)$ – аналит. функ. пер. t.

предст. абсол. сх-ся числ. рядом с $R=\infty$ (радиус сх-ти)

аналит. ф. $\Rightarrow$ ∞-дифф-ма, но не наоборот теор (Гамильтона-Кэли) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

copybook

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n(\lambda^n - h_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - h_0) = H(\lambda)$$

$$\Rightarrow H(\lambda)\Big|_{\lambda = A} = 0$$

из теор Г-К $\Rightarrow A^n = h_{n-1}A^{n-1} + h_{n-2}A^{n-2} + \dots + h_0 E.$

$$A^n = \rho_{n-1}^{(0)} A^{n-1} + \rho_{n-2}^{(0)} A^{n-2} + \dots \rho_0^{(0)} E$$

$A^{n+i} = \rho_{n-1}^{(i)} A^{n-1} + \rho_{n-2}^{(i)} A^{n-2} + \dots + \rho_0^{(i)} E.$ – покажем.

$$\rho_j^{(0)} = h_j, \quad j = \overline{0, n-1}$$

$$A^{n+1} = \rho_{n-1}^{(0)} A^n + \rho_{n-2}^{(0)} A^{n-1} + \dots + \rho_0^{(0)} A =$$

$$= \rho_{n-1}^{(0)}\left(\rho_{n-1}^{(0)} A^{n-1} + \dots + \rho_0^{(0)} E\right) + \rho_{n-2}^{(0)} A^{n-1} + \dots + \rho_0^{(0)} A =$$

$$= \left[\rho_{n-1}^{(0)2} + \rho_{n-2}^{(0)}\right] A^{n-1} + \left[\rho_{n-1}^{(0)} \rho_{n-2}^{(0)} + \rho_{n-3}^{(0)}\right] A^{n-2} + \dots + \left[\rho_{n-1}^{(0)} \rho_0^{(0)}\right] E.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_{n-1}^{(1)} = \rho_{n-1}^{(0)} \cdot \rho_{n-1}^{(0)} + \rho_{n-2}^{(0)} \\ \rho_{n-2}^{(1)} = \rho_{n-1}^{(0)} \rho_{n-2}^{(0)} + \rho_{n-3}^{(0)} \\ \vdots \\ \rho_{n-1}^{(1)} = \rho_{n-1}^{(0)} \rho_0^{(0)} \end{cases}$$

и т.д.

$$\Rightarrow e^{tA} = E\left(1 + a_1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots\right) + A(\dots)t \dots + A^{n-1}(\dots). =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} p_j(t) A^j \qquad \square$$

или можно так искать.

$$e^{tA} = p_0(t)E + p_1(t)A$$

дифф-м e^{tA} ↑ и приравниваем

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

Класс абсол. непр-х ф-ций.

опр $f(x)$ – абс. непр-на на $[t_0, t_1]$, если $\exists \dot{f}(t)$ почти всюду на $[t_0, t_1]$, $\dot{f}(t)$ инт-ма по Лебегу на $[t_0, t_1]$, $f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{f}(s)ds$

теор (существ-я и ед-ти) пусть $u(t)$ инт-ма по Лебегу на $[t_0, t_1]$. Тогда решение задачи Коши $(*)$ существует и единственно на $[t_0, t_1]$ в классе абсолютно непр-х функций и дается ф-лой Коши:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)A} u(s)ds\right) =$$

$$= e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} u(s)ds$$

$\triangleright$ $\exists$. $x(t_0) = E \cdot x_0 = x_0$.

$$\dot{x}(t) = \underbrace{Ae^{(t-t_0)A}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)A} u(s)ds\right)}_{x(t)} +$$

$$+ \underbrace{e^{(t-t_0)A}\, e^{-(t-t_0)A}}_{E} u(t) = Ax(t) + u(t)$$

для п.в. t.

! пусть $\exists\ x_1(t), x_2(t)$ – два решения.

copybook

$$z(t) = x_1(t) - x_2(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

$$\begin{cases} \dot z(t) = A z(t) \\ z(t_0) = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

покажем, что только $z(t) \equiv 0$.

$$\frac{d}{dt}\|z(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\big(z(t), z(t)\big) = 2(\dot z, z) = 2(Az, z) \leq$$

$$\leq 2\|A\|\,\|z\|^2$$

$$\varphi(t) = e^{-2\|A\|(t-t_0)}\|z(t)\|^2$$

$$\dot\varphi(t) = \frac{d}{dt}\|z(t)\|^2 \cdot e^{-2\|A\|(t-t_0)} - 2\|A\|\, e^{-2\|A\|(t-t_0)}\|z(t)\|^2 \leq$$

$$\leq 2\|A\|\,\|z\|^2 e^{-2\|A\|(t-t_0)} - 2\|A\|\,\|z\|^2 e^{-2\|A\|(t-t_0)} = 0$$

для п.в. $t \in [t_0, t_1]$.

$$\varphi(t_0) = 0$$

$$\varphi(t) = \underset{0}{\underbrace{\varphi(t_0)}} + \int_{t_0}^{t} \dot\varphi(s)\,ds = \int_{t_0}^{t}\dot\varphi(s)\,ds \leq 0$$

С др. сторона $\varphi(t) \geq 0$ (по виду) $\Rightarrow \varphi(t) \equiv 0$.

$$\Rightarrow z(t) \equiv 0. \qquad \square$$

$$(*) \begin{cases} \dot x(t) = A x(t) \\ x(t_0) \in M_0 \end{cases} \qquad u \in \mathcal{D}_U$$

$X(t)$ – множество достижимости

мн-во всех точек пр-ва, в которые можно попасть, перебирая допуст. управления.

$$X(t) = \{z \in E^n : \dot{x}(s) = Ax(s) + u(s),\ x(t_0) \in M_0, [t_0 - t], \ \forall u(\cdot) \in \mathcal{D}_v,\ z = x(t)\} =$$

$$= \{z \in E^n : z = e^{(t-t_0)A}(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)A} u(s)ds),\ \forall x_0 \in M_0,\ \forall u(\cdot) \in \mathcal{D}_v\}$$

$$= \bigcup_{\substack{x_0 \in M \\ u(\cdot) \in \mathcal{D}_v}} \{ e^{(t-t_0)A} (x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)A} u(s)ds) \}.$$

свойства мн-ва достижимости

$$X(t_0) = e^{(t-t_0)A} M_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} \mathcal{U} ds$$

$\boxed{03.11.15}$

$\dot{x} = Ax - v$

$x(t_0) \in M_0$

$u(\cdot) \in \mathcal{D}_u$

$t \in [t_0, t_1]$

$$X(t) = \{z \in E^n : \dot{x}(t) = Ax(t) + u(t),\ \forall x_0 \in M_0,\ \forall u \in \mathcal{D}_u[t_0, t]\} =$$

$$= \bigcup_{\substack{x_0 \in M_0 \\ u(\cdot) \in \mathcal{D}_u}} \{ e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} u(s) ds \}.$$

<u>Свойства мн-ва достижимости.</u>

1) $X(t) = e^{(t-t_0)A} M_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} \mathcal{U} ds$

2) а) $M_0, \mathcal{U} \in \Omega(E^n) \Rightarrow X(t) \in \Omega(E^n)\ \forall t \in [t_0, t_1]$.

б) $M_0 \in \operatorname{conv} \Omega(E^n), \mathcal{U} \in \Omega(E^n) \Rightarrow X(t) \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$ $\forall t \in [t_0, t_1]$ $X(t_0) = M_0$.

3) $c(X(t), \psi) = c(M_0, e^{(t-t_0)A^*}\psi) + \int_{t_0}^{t} c(\mathcal{U}, e^{(t-s)A^*}\psi) ds$

4) $\tau = t - t_0$

$X(t) = e^{\tau A} M_0 + \int_0^{\tau} e^{sA} \mathcal{U} ds$

$$\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} \mathcal{U} ds \overset{?}{=} \int_0^{\tau} e^{sA} \mathcal{U} ds$$

▷ $G_1 \overset{?}{=} G_2$

$G_1, G_2 \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$.

$c(G_1,\psi) \overset{?}{=} c(G_2,\psi) \quad \forall \psi \in S$

$$c(G_1,\psi) = \int_{t_0}^{t} c(\mathcal{U}, e^{(t-s)A^*}\psi)\,ds = \left\{ \begin{array}{l} t-t_0=\alpha, \\ ds=-d\alpha \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{t-t_0}^{0} c(\mathcal{U}, e^{\alpha A^*}\psi)(-d\alpha) = \int_{0}^{t-t_0} c(\mathcal{U}, e^{\alpha A^*}\psi)\,d\alpha =$$

$= c(G_2,\psi)$ □

5) $X(t)$ непр-но зависит от $t \in [t_0, t_1]$.

(4) ⟹ $X(t)$ непрна по τ, $t=\tau+t_0$ ⟹ непрна по t.

<u>мн-во управляемости:</u>

$Z(t) = \{ z \in E^n : \dot{x}(t) = Ax(t) + u(t),\ \forall x_1 \in M_1,\ \forall u \in \mathcal{D}_u,$
$t \in [t, t_1];\ z = x(t) \} \ominus$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax+u \\ x(t_1) \in M_1 \\ u \in \mathcal{D}_u \end{cases}$$ — ~~мн-во началь~~ решаем систему назад

$$\ominus \bigcup_{\substack{x_1 \in M_1 \\ u(\cdot) \in \mathcal{D}_u}} \left\{ e^{(t-t_1)A} x_1 + \int_{t_1}^{t} e^{(t-s)A} u(s)\,ds \right\} =$$

$$= \bigcup_{\substack{x_1 \in M_1 \\ u(\cdot) \in \mathcal{D}_u}} \left\{ e^{(t_1-t)A} x_1 + \int_{t}^{t_1} e^{(t-s)A} (-u(s))\,ds \right.$$

<u>Свойства мн-ва управляемости:</u>

1) $Z(t) = e^{(t-t_1)}M_1 + \int_{t}^{t_1} e^{(t-s)A}(-\mathcal{U})\,ds$

2) $\mathcal{U}, M_1 \in \Omega(E^n) \Rightarrow Z(t) \in \Omega(E^n) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$

$\mathcal{U} \in \Omega(E^n),\ M_1 \in \operatorname{conv} \Omega(E^n) \Rightarrow Z(t) \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$
$\forall t \in [t_0, t_1]$

$Z(t_1) = M_1$

3) $c(Z(t), \psi) = c(M_1 e^{(t-t_1)A^*}\psi) + \int_t^{t_1} c(\mathcal{U}, -e^{(t-s)A^*}\psi)ds$

4) $\tau = t_1 - t$

$Z(t) = e^{-\tau A} M_1 + \int_0^{\tau} e^{-sA}(-\mathcal{U})\, ds$

5) $Z(t)$ непр-но зависит от t.

<u>пример</u> $\dot{x} = \mathcal{U}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad X(\tau) = \underbrace{\overbrace{e^{\tau A}}^{E} M_0}_{0} + \int_0^{\tau} \overbrace{e^{sA}}^{E} \mathcal{U} ds =$

$x, \mathcal{U} \in E^2$

$M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \tau = t - t_0$ $\quad = \int_0^{\tau} \mathcal{U} ds$

$\tau = t_1 - t$

$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad Z(\tau) = \overbrace{e^{-\tau A} M_1}^{0} + \int_0^{\tau} \overbrace{e^{-sA}}^{E} (-\mathcal{U}) ds$

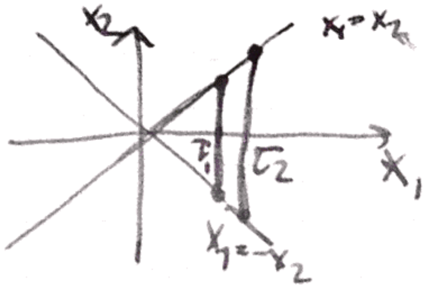
$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad = \int_0^{\tau} (-\mathcal{U}) ds$

$c(X(\tau), \psi) = \int_0^{\tau} c(\mathcal{U}, \psi) ds = \tau c(\mathcal{U}, \psi)$

$c(\mathcal{U}, \psi) = \psi_1 + |\psi_2|$

$X(\tau) = \int_0^{\tau} \mathcal{U} ds = \tau \operatorname{conv} \mathcal{U} = \{ (x_1, x_2) \in E^2 : x_1 = \tau, |x_2| \le \tau \}$

$Z(\tau) = \int_0^{\tau} [-\mathcal{U}] ds = \tau \operatorname{conv} [-\mathcal{U}] = \{ (x_1, x_2) \in E^2, x_1 = -\tau, |x_2| \le \tau \}$



Сопряжённая переменная

$\dot{\psi} = -A^* \psi$ — сопряжённое ур-е

$\psi(t) = e^{\cancel{t t_0} -(t-t_0)A^*} \psi(t_0)$

опр любое нетрив. решение сопр-го ур-я наз-ся сопряжённой переменной.

$\psi(t_0) \neq 0 \Rightarrow \psi(t) \neq 0.$

лемма (о сопряжённой переменной)

1) $c(X(t), \psi(t)) = c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t} c(\mathcal{U}, \psi(s))ds$

2) $c(Z(t), -\psi(t)) = c(M_1, -\psi(t_1)) + \int_{t}^{t_1} c(\mathcal{U}, \psi(s))ds.$

3) $(x(t), \psi(t)) = (x(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t} (u(s), \psi(s))ds$

4) $(x(t), \psi(t)) = (x(t_0), \psi(t_1)) + \int_{t}^{t_1} (u(s), \psi(s))ds$

▷ $x(t) = e^{(t-t_0)A} (x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)A} u(s)ds)$

$\psi(t) = e^{-(t-t_0)A^*} \psi(t_0)$

$(x(t), \psi(t)) = (e^{(t-t_0)A}(x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)A} u(s)ds), e^{-(t-t_0)A^*}\psi(t_0))$

$= (x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)A} u(s)ds, \underbrace{e^{(t-t_0)A^*} e^{-(t-t_0)A^*}}_{E} \psi(t_0)) =$

$= (x(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t} (e^{-(s-t_0)A} u(s), \psi(t_0))ds =$

$= (x(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t} (u(s), \underbrace{e^{-(s-t_0)A^*} \psi(t_0)}_{\psi(s)})ds =$

$=$ (3).

(1) — следствие (3).

$\psi(t) = e^{-(t-t_1)A^*} \psi(t_1), \quad \psi(t_1) \neq 0.$

$x(t) = e^{(t-t_1)A} (x(t_1) + \int_{t_1}^{t} e^{-(s-t_1)A} u(s)ds)$

$$-e^{-(t-t_1)}$$

$$(x(t), -\psi(t)) = \left(e^{-(t-t_1)A}\left(x(t_1) + \int_{t_1}^{t} e^{-(s-t_1)A}(-u(s))ds, -\psi(t)\right)\right) =$$

$$= \left(x(t_1) + \int_t^{t_1} e^{-(s-t_1)A}(-u(s))ds, \underbrace{-e^{-(t-t_1)A^*}e^{-s(t-t_1)A^*}}_{E}\psi(t_1)\right) =$$

$$= (x(t_1), -\psi(t_1)) + \int_t^{t_1} \left(e^{-(s-t_1)A} u(s), \psi(t_1)\right) ds =$$

$$= (x(t_1), -\psi(t_1)) + \int_t^{t_1} \left(u(s), \underbrace{e^{-(s-t_1)A^*}\psi(t_1)}_{\psi(s)}\right) ds = (*).$$

$\square$

Критерий управляемости

$\dot{x} = Ax + u$ $\qquad \exists\, t_1 > t_0 \quad X(t_1) \cap M_1 \neq \varnothing.$

$x(t_0) \in M_0$

$x(t_1) \in M_1$ $\qquad c(X(t_1), \psi) + c(M_1, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in S$

$\psi(t_1) = \psi$ – пусть

$\Rightarrow c(X(t_1), \psi(t_1)) + c(M_1, -\psi(t_1)) \geq 0 \quad \forall \psi(t_1) \in E^n.$

$\psi(t) = e^{-(t-t_1)A^*}\psi(t_1)$

$c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} c(U, \psi(s))ds + c(M_1, -\psi(t_1)) \geq 0$

$\forall \psi(t).$

условие $(*)$ явл-ся необходимым усл-м упр-ти

<u>Утв 2</u> если $M_0, M_1 \in \text{conv-}\Omega(E^n)$, то $(*)$ – необх. и дост. условие управляемости.

$$(*): \; c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} c(U, e^{-(s-t_0)A^*}\psi(t_0))ds +$$

$$+ c(M_1, -e^{-(t_1-t_0)A^*}\psi(t_0)) \geq 0$$

$\forall \psi(t_0) \neq 0$

$$\varphi(\psi) = c(M_0, \psi) + \int_{t_0}^{t_1} c(U, e^{-(s-t_0)A^*}\psi) + c(M_1, -e^{-(t_1-t_0)}\psi)$$

$$m_0 = \min_{\psi \in S} \varphi(\psi)$$

условие равн-ное:

1) $\varphi(\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n$
2) $\varphi(\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in S$
3) $m_0 \geq 0$.

$\boxed{10.11.15}$

$$(1)\ \begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ u(\cdot) \in \Omega_u \end{cases} \qquad \dot{\psi} = -A^*\psi$$

$$c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} c(U, \psi(s))\,ds + c(M_1, -\psi(t_1)) \geq 0 \qquad (*)$$

$$\varphi_0(\psi) = c(M_0, \psi) + \int_{t_0}^{t_1} c(U, e^{-(s-t_0)A^*}\psi)\,ds + c(M_1, -e^{-(t_1-t_0)A^*}\psi)$$

$$\psi(t) = e^{(t-t_0)A^*}\psi(t_0)$$

$$\varphi_1(\psi) = c(M_0, e^{(t_0-t_1)A^*}\psi) + \int_{t_0}^{t_1} c(U, e^{-(s-t_1)A^*}\psi)\,ds + c(M_1, -\psi)$$

теор: необх усл-е упр-ти системы (1), $M_0, M_1 \in \Omega(E^n)$ имеет вид

$\varphi_0(\psi) \geq 0 \ \forall \psi \in E^n$ $\qquad$ $\varphi_1(\psi) \geq 0 \ \forall \psi \in E^n$

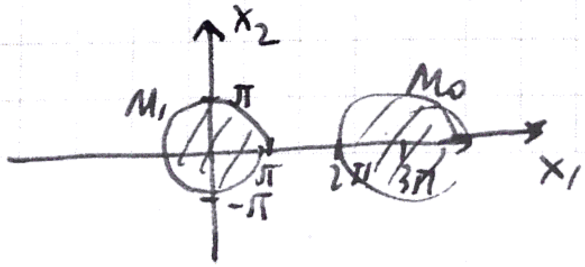
$\varphi_0(\psi) \geq 0 \ \forall \psi \in S$ $\qquad$ $\varphi_1(\psi) \geq 0 \ \forall \psi \in E^n$

$m_0 \geq 0$ $\qquad$ $m_1 \geq 0$

если $M_0, M_1 \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$, то необх и дост. усл-е.

пример: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2 \end{cases}$ $\qquad M_0 = S_\pi\left(\begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$U = S_1(0)$ $\qquad\qquad M_1 = S_\pi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$



$c(M_0,\psi) = 3\pi\psi_1 + \pi\|\psi\|$, $c(\mathcal{U},\psi) = \|\psi\|$

$c(M_1,\psi) = \pi\|\psi\|$.

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\varphi_0(\psi) = 3\pi\psi_1 + \pi\|\psi\| + \int_0^{t_1} \|e^{-sA^*}\psi\|\,ds + \|e^{-t_1A^*}\psi\| =$$

$\|e^{tA}\psi\| = \|\psi\|$ (т.к. матрица поворота)

$$= 3\pi\psi_1 + \pi\|\psi\| + \underbrace{\int_0^{t_1}\|\psi\|ds}_{t_1\|\psi\|} + \pi\|\psi\| = 3\pi\psi_1 + 2\pi\|\psi\| + t_1\|\psi\|.$$

$$m_0 = \min_{\psi\in S}\varphi_0(\psi) = \min_{\psi\in S}\{3\pi\psi_1 + 2\pi + t_1\} = -3\pi + 2\pi + t_1 =$$

$\psi = (-1,0)$ $\qquad = t_1 - \pi \geq 0$

$\Rightarrow t_1 \geq \pi$ - для упр-ти.

$$c(X(t),\psi) = c(M_0, e^{+tA^*}\psi) + \int_{t_0}^{t} c(\mathcal{U}, e^{(t-s)A^*}\psi)\,ds =$$

$$X(t) = e^{tA}M_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A^*}\mathcal{U}\,ds$$

$$e^{tA^*}\psi = e^{tA^*}\psi = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_1\cos t + \sin t\,\psi_2 \\ -\psi_1\sin t + \psi_2\cos t\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\tilde\psi_1\\ \tilde\psi_2\end{pmatrix}$$

$$c(M_0, e^{tA^*}\psi) = 3\pi\tilde\psi_1 + \pi\|\psi\| = 3\pi\psi_1\cos t - 3\pi\psi_2\sin t +$$

$$+ \pi\|\psi\|$$

$$\int_0^t c(\mathcal{U}, e^{(t-s)A^*}\psi)\,ds = \int_0^t \|e^{(t-s)A^*}\psi\|\,ds = \int_0^t \|\psi\|\,ds = t\|\psi\|$$

$$\Rightarrow c(X(t),\psi) = 3\pi\cos t\,\psi_1 - 3\pi\sin t\,\psi_2 + (\pi+t)\|\psi\| = c(S_{r(t)}(a(t)),\psi)$$

$r(t) = \pi + t$

$a(t) = 3\pi\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}$.

$t=0 \Rightarrow X(0) = M_0.$

$t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow X(\tfrac{\pi}{2}) = S_{\frac{3\pi}{2}}\left(3\pi\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right)$

$t=\pi \Rightarrow X(\pi) = S_{2\pi}\left(3\pi\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)$ – момент встречи

$t=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow X(\tfrac{3\pi}{2}) = S_{\frac{5\pi}{2}}\left(3\pi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right).$

$Z(t) = S_{2\pi-t}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right).$

лемма

Основная лемма

1) $M_0, M_1 \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$

2) $t_1 - t_0$ – время быстродейств.

$\exists \psi(t): \dot\psi = -A^*\psi$

$c(X(t_1), \psi(t_1)) + c(M_1, -\psi(t_1)) = 0$

$X(t_1) \cap M_1 \neq \varnothing \Leftrightarrow c(X(t_1), \psi) + c(M_1, -\psi) \geq 0$

▷ $c(X(t_1), \psi(t_1)) + c(M_1, -\psi(t_1)) \geq 0 \quad \forall \psi(t_1) \in S$

выберем $t < t_1$, $X(t) \cap M_1 = \varnothing$. ($t_1$ – реш. зад быстр)

$\Rightarrow \exists p \in S: \quad c(X(t), p) + c(M_1, -p) < 0$

$t_k \to t_1 - 0 \Rightarrow X(t_k) \cap M_1 = \varnothing \Rightarrow \exists p_k:$

$c(X(t_k), p_k) + c(M_1, -p_k) < 0$

$\Rightarrow \exists \lim_{m\to\infty} p_{k_m} = p_* \in S$

$\Rightarrow c(X(t_1), p_*) + c(M_1, -p_*) \leq 0$

если $\psi = p_*$, то $c(X(t_1), p_*) + c(M_1, -p_*) \geq 0.$

$\psi(t_1) = p_*$ $\square$

пример

$\dot x = u, \quad u \in S_1(0)$

$x, u \in E^2$

$M_0 = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$M_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right\}$

$t=1$ – первый захват

$X(t) = S_t\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)$

copybook

$c(X(t_1), \psi) + c(M_1, -\psi) = \|\psi\| + |\psi_1| > 0$

т.к. нет выпуклости и лемма не работает.

теор. (принцип максимума Понтрягина)

$(u(t), x(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ — допустимый процесс $u(\cdot) \in \mathcal{D}_{\text{u}}$.

$\dot{x} = Ax + u$, $x(t_0) \in M_0$, $x(t_1) \in M_1$

$\psi(t)$ — произв. реш. сопряж. ур-е $\dot{\psi} = A^* \psi$.

опр $(u(t), x(t))$ $t \in [t_0, t_1]$ — допуст пара уд-т принц. макс. Понтрягина с сопр перем $\psi(t)$, если

1) $(u(t), \psi(t)) = c(U, \psi(t))$ $\forall t \in [t_0, t_1]$ — почти всех t (условие максимума)

2) $(x(t_0), \psi(t_0)) = c(M_0, \psi(t_0))$ (условие трансверсальности)

3) $(x(t_1), -\psi(t_1)) = c(M_1, -\psi(t_1))$ (условие трансверсальн-ти)

теор (необходимое условие оптимальности)

1) $M_0, M_1 \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$

2) $(u(t), x(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ решает ЗБ.

$\Rightarrow \exists \psi(t) \not\equiv 0$: $u(t), x(t)$ удовл-т принц. макс. П. с $\psi(t)$.

▷ $\left.\begin{array}{l} X(t_1) \cap M_1 \neq \varnothing \\ X(t) \cap M_1 = \varnothing \quad t < t_1 \end{array}\right\}$ основн. лемма

$\Rightarrow \exists \psi(t) \neq 0$: $c(X(t_1), \psi(t_1)) + c(M_1, -\psi(t_1)) = 0$

$(X(t_1), \psi(t_1)) + (x(t_1), -\psi(t_1)) = 0$ ⊖

$\Rightarrow \underbrace{[c(X(t_1), \psi(t_1)) - (x(t_1), \psi(t_1))]}_{\geq 0} + \underbrace{[c(M_1, -\psi(t_1)) - (x(t_1), -\psi(t_1))]}_{\geq 0}$

copybook

$\Rightarrow [\ldots]_* = 0 \Rightarrow (3)$

$[\ldots]_1 = 0 \Leftrightarrow$ (лемма о с.п.):

$$c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} c(\mathcal{U}, \psi(s))ds - (x(t_0), \psi(t_0)) - $$
$$- \int_{t_0}^{t_1} (u(s), \psi(s))ds = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{[c(M_0, \psi(t_0)) - (x(t_0), \psi(t_0))]_*}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \underbrace{[c(\mathcal{U}, \psi(s)) - (u(s), \psi(s))]}_{\geq 0} ds}_{=0}$$

$[\ldots]_1 = 0 \Rightarrow (2)$

$\int_{t_0}^{t_1} [\ldots]_2 ds = 0 \Rightarrow (1).$ $\square$

$\boxed{17.11.15}$

<u>лемма</u> (об эквив. формулировки принципа максимума)

1) $M_0, M_1 \in \Omega(E^n)$

2) $(x(t), u(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ - допустимый процесс

$\Rightarrow$ след. 2 утв-я эквивалентны:

① пара $(x(t), u(t))$ - уд-т ПМП с сопр. пер. $\psi(t)$ $t \in [t_0, t_1]$.

② $(x(t), \psi(t)) = c(X(t), \psi(t))$ $\forall t \in [t_0, t_1]$. (2.1)

$(x(t), -\psi(t)) = c(Z(t), -\psi(t))$ $\forall t \in [t_0, t_1]$. (2.2)

$X(t) = X(t, t_0, M_0)$

$Z(t) = Z(t, t_1, M_1)$

$\triangleright$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\quad c(X(t), \psi(t)) = c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t} c(\mathcal{U}, \psi(s))ds =$

(лемма о сопр-й перем.)

$\underset{\text{ПМП}}{\overset{①②}{=}} (x(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t} (u(s), \psi(s))ds = (x(t), \psi(t))$

$$c(Z(t), -\psi(t)) \overset{\text{л. о с.п.}}{=} c(M_1, -\psi(t_1)) + \int_t^{t_1} c(\mathcal{U}, \psi(s))ds \overset{\text{л. о сопр. перем.}}{=}$$

$\underset{\text{ПМП}}{\overset{①③}{=}} (x(t_1), -\psi(t_1)) + \int_t^{t_1} (u(s), \psi(s))ds \underset{\text{л о сп}}{\overset{t}{=}} (x(t), -\psi(t)).$

$(2) \Rightarrow (1)$: $\quad$ б (2.1) $t > t_0 \Rightarrow$ ② п.м.п.
(2.2) $t > t_1 \Rightarrow$ ③ п.м.п

$$(x(t), \psi(t)) \overset{\text{л.о.оп.}}{=} (x(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t} (\psi(s), u(s))ds \quad \ominus$$

$$c(X(t), \psi(t)) = c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t} (\mathcal{U}, \psi(s))ds$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} (\psi(s), u(s))ds = \int_{t_0}^{t} (\mathcal{U}, \psi(s))ds$$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}$: $(\psi(s), u(s)) = c(\mathcal{U}, \psi(s))$ $\quad \forall c \in [t_0, t_1]$. почти всех

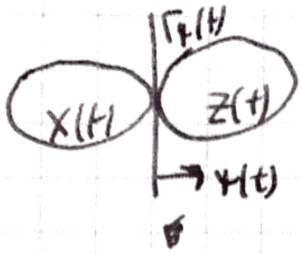
$\square$

<u>геометрический смысл:</u>

$X(t)$, $Z(t)$, $\Gamma_\psi(t)$

$\Gamma_\psi(t) = \{y \in E^n: (y - x(t), \psi(t)) = 0\}$

$(u(t), x(t))$ $\cdot$ $t \in [t_0, t_1]$ $\quad x(t) \in X(t)$, $x(t) \in Z(t)$ $\quad x(t) \in \Gamma_\psi(t)$.



<u>теор</u> (существования) 1) $M_0, M_1 \in \Omega(E^n)$
2) $\mathcal{D}_u$ – изм-е ф-ции, $\mathcal{U} \in \Omega(E^n)$
3) $\exists$ $T > t_0$, что $[t_0, T]$ – система управляема из M_0 в M_1.

$\Rightarrow$ $\exists$ оптимальное решение.

$\triangleright$ $I = \{T > t_0$, система управляема на $[t_0, T]\}$
$I \neq \varnothing$ $\quad T > t_0 \Rightarrow \exists t_1 = \inf I$
$t_0 \leq t < t_1$, $X(t) \cap M_1 = \varnothing$.
$X(t_1) \cap M_1 \neq \varnothing$ – надо доказать

$T^k \geq t_1$, $T^k \to t_1 + 0$, $k \to +\infty$
$\forall k$: $X(T^k) \cap M_1 \neq \varnothing$. $\Rightarrow \forall k$ $\exists x^k \in M_1$.
$x^k \to x^* \in M_1$, $k \to \infty$
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_1$: $\forall k \geq k_1$ $\|x^* - x^k\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow x^* \in \{x^k\} + S_{\varepsilon/2}(0)$

$h(X(T^k), X(t_1)) \underset{k\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \exists k_2 : \forall k \geq k_2 :$

$X(T^k) \subset X(t_1) + S_{\frac{\varepsilon}{2}}(0).$

$k_3 = \max\{k_1, k_2\}$

$\forall k \geq k_3$

$x^* \in \{x^k\} + S_{\varepsilon/2}(0) \subset$ ©

$\Rightarrow \begin{cases} x^k \in M_1 \\ x^k \in X(t^k) \end{cases}$ © $X(T^k) + S_{\varepsilon/2}(0) \subset X(T^1) + S_{\varepsilon/2}(0) + S_{\varepsilon/2}(0)$

$\Rightarrow \exists x^* \in M_1 : \forall \varepsilon > 0 \; x^* \in X(t_1) + S_\varepsilon(0)$

$\varepsilon_m = \frac{1}{m},\ m = 1, 2, \ldots \Rightarrow x^* \in X(t_1) + S_{\frac{1}{m}}(0) =$

$= X(t_1) + \frac{1}{m} S_1(0)$

$\Rightarrow x^* = \xi^m + \frac{1}{m}\psi^m,\ \xi^m \in X(t_1),\ \|\psi^m\| \leq 1.$

$\xi^m \to \xi^* \in X(t_1)$

$x^* = \xi^* \in X(t_1) \Rightarrow X(t_1) \cap M_1 \neq \emptyset.$ □

$M_0, M_1 \in \operatorname{conv} \Omega(E^n).$

$t_1 = \inf I.$

$T^k \to t_1 + 0.$ $\quad X(t) \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$

$X(t_k) \cap M_1 \neq \emptyset \Leftrightarrow c(X(T^k), \psi) + c(M_1, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in S$

$k \to \infty: \quad c(X(t_1), \psi) + c(M_1, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in S. \Rightarrow$

$\Rightarrow X(t_1) \cap M_1 \neq \emptyset.$

<u>теор</u> (достаточное усл-е оптимальности)

1) $M_0, M_1 \in \Omega(E^n)$

2) $(x(t), u(t))$ $t \in [t_0, t_1]$ удовл-т ПМП с с.п. $\psi(t)$.

3) $(x(t), -\psi(t)) > c(M_1, -\psi(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ - усил. усл-е.

$\Rightarrow (x(t), u(t))$ - оптим. пара.

▷

3) $\Rightarrow$ $(x(t), \psi(t)) + c(M_1, -\psi(t)) < 0 \quad t\in[t_0,t_1]$.

2) $\Rightarrow$

$c(X(t), \psi(t)) + c(M_1, -\psi(t)) < 0 \quad t\in[t_0,t_1]$.

$\Rightarrow X(t)\cap M_1 = \varnothing$ }

2) $\Rightarrow X(t_1)\cap M_1 \neq \varnothing$ } $\Rightarrow$ $(x(t), u(t))$ – оптим. пара

◁

(3*) $(x(t), \psi(t)) > c(M_0, \psi(t)) \quad \forall t\in[t_0,t_1]$.

$(x(t), -\psi(t)) + c(M_0, \psi(t)) < 0$

$c(Z(t), -\psi(t)) + c(M_0, \psi(t)) < 0$

$Z(t)\cap M_0 = \varnothing \quad t\in[t_0,t_1]$

$\dot{x} = Ax+u, \ \Omega_u, \ x(t_1)\in M_1$

Опр динам. система наз-ся локально упр-й на M_1 на $[t,t_1]$, если $\exists \varepsilon>0$, что $\forall y\in M_1+S_\varepsilon(0)$, система упр-ма из $\{y\}$ на M_1 на $[t,t_1]$.

$M_1 + S_\varepsilon(0) \subset Z(t,t_1,M_1) \Rightarrow c(M_1+S_\varepsilon(0), \psi) \le c(Z(t),\psi) \ \forall \psi\in E^n$

$c(M_1,\psi) + \varepsilon\|\psi\| \le c(Z(t),\psi), \ \forall \psi \in E^n$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{c(M_1,\psi) < c(Z(t),\psi)}, \ \forall \psi\in S$.

необх-е усл, если $M_1\in\Omega(E^n)$

необх-е и дост. усл-е, если $M_1\in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$

теор (дост. усл-е в форме локальн. упр-ти)

1) $M_0, M_1\in\Omega(E^n)$

2) $(u(t), x(t))$, $t\in[t_0,t_1]$ уд-т ПМП с $\psi(t)$

3) на $\forall [t,t_1]$, $t\in[t_0,t_1)$ сист. лок. упр-ма на M_1.

$\Longrightarrow$ $(x(t), u(t))$ – оптим. пара.

▷ $\psi = -\psi(t)$, тогда

$$c(M_1, -\psi(t)) \leq c(Z(t), -\psi(t))$$

$$- \varepsilon\|-\psi(t)\| \qquad \forall t \in [t_0, t_1)$$

по лемме об экв. ф-ле ПМП.

$$c(M_1, -\psi(t)) + \varepsilon\|\psi(t)\| \leq (x(t), -\psi(t))$$

$\forall t \in [t_0, t_1)$: $(x(t), -\psi(t)) > c(M_1, -\psi(t))$

получили ус-ное усл-е трансверс.

$\Rightarrow (x(t), u(t))$ - оптим процесс.

□

$M_1 = \{0\}$ (свели, если было одноточ. мн-во)

$M_1 + S_\varepsilon(0) \subset Z(t)$

$S_\varepsilon(0) \subset Z(t, t_1, \{0\})$

$0 \in Z(t, t_1, \{0\})$

$$Z(t, t_1, \{0\}) = \{0\} + \int_t^{t_1} e^{(t-s)A}[-u]ds =$$

$$= \int_0^{t_1 - t} e^{-sA}[-u]ds$$

<u>лемма</u> (о внутр. точке интеграла)

1) $u \in \{-v, v\}$

2) $X = \int_0^t e^{sA}\{-v, v\} ds$

$\Rightarrow 0 \in \operatorname{int} X \Leftrightarrow v, Av, \dots, A^{n-1}v$ - лин. нез-е.

$\dot{x} = Ax + u$
$x(t_1) \in M_1 = \{0\}$
$u \in \mathcal{U}$

$$Z(t, t_1, \{0\}) = \int_t^{t_1} e^{(t-s)A}[-\mathcal{U}]ds = \int_0^{t_1-t} e^{sA}[-\mathcal{U}]ds.$$

$$\exists \varepsilon > 0: \ M_1 = \{0\} + S_\varepsilon(0) \subset Z(t, t_1, \{0\}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 \in \operatorname{int} Z(t, t_1, \{0\}).$$

Лемма (о внутр. точке интеграла)
1) $\mathcal{U} = \{v, -v\}, \ v \in E^n$. $\quad \mathcal{U} \in \Omega(E^n)$.
2) $A = (n \times n)$ – пост. матрица
3) $X = \int_0^t e^{-sA}\{-v, v\}ds \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$

$0 \in \operatorname{int} X \Leftrightarrow v, Av, \dots, A^{n-1}v$ – лин. незав.

$\triangleright$ $0 \in \operatorname{int} X \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ S_\varepsilon(0) \subset X \Leftrightarrow \varepsilon\|\psi\| \le c(X, \psi), \forall \psi \in E^n$
$\Leftrightarrow c(X, \psi) \geq \varepsilon > 0 \ \forall \psi \in S \Leftrightarrow m = \min_{\psi \in S} c(X, \psi) > 0 \Leftrightarrow m > 0$

$$c(X, \psi) = \int_0^t c(e^{-sA}\{-v, v\}, \psi)ds =$$
$$= \int_0^t c(\{-v, v\}, (e^{-sA})^*\psi)ds = \int_0^t |(v, e^{-sA^*}\psi)|ds =$$
$$= \int_0^t |(e^{-sA}v, \psi)|ds \geq 0 \quad \forall \psi$$

$m = 0 \Leftrightarrow v, Av, \dots, A^{n-1}v$ – лин зав. – д-м.

$\Rightarrow$ $m = 0$: $\exists \bar{\psi} \in S$, $c(X, \bar{\psi}) = 0$

$$\int_0^t |(e^{-sA}v, \psi)|ds = 0 \Leftrightarrow (e^{-sA}v, \psi) \equiv 0 \quad s \in [0, t].$$

$(e^{-sA}Av, \bar{\psi}) \equiv 0$ – дифф-ли $\quad s \in [0, t]$

$\vdots$

$(e^{-sA}A^{n-1}v, \bar{\psi}) \equiv 0 \quad s \in [0, t]$.

$s = 0$. (либо пред. переход, если $s \in (0, t]$).

$\Rightarrow$ $(v, \bar{\psi}) = 0$
$(Av, \bar{\psi}) = 0$
$\vdots$
$(A^{n-1}v, \bar{\psi}) = 0$

$(v \,|\, Av \,|\, \dots \,|\, A^{n-1}v)\bar{\psi} = 0$
$\Rightarrow$ ненул. реш. и $\det B = 0$.
сист. л.з.

$\Leftarrow$ $\nexists$ $Av, \dots A^{n-1}v$ – л.з. $\Rightarrow \exists \bar{\psi}: (v, \bar{\psi}) = 0$ $\quad \bar{\psi} \in S$

$\vdots$

$(A^{n-1}v, \bar{\psi}) = 0$

$$e^{-sA} = \sum_{j=0}^{n-1} p_j(s) A^j$$

$$0 \le m = \min_{\psi \in S} c(X, \psi) \le c(X, \bar{\psi}) = \int_0^t |(e^{-sA} v, \bar{\psi})| ds =$$

$$= \int_0^t \left| \left(\left(\sum_{j=0}^{n-1} p_j(s) A^j \right) v, \bar{\psi} \right) \right| ds = \int_0^t \left| \sum_{j=0}^{n-1} p_j(s) \underbrace{(A^j v, \bar{\psi})}_{0} \right| ds = 0$$

$\Rightarrow m = 0$

$\square$.

<u>теор1</u> 1) $M_1 = \{0\}$

2) $\exists v \in U: -v \in U$ и $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ – лин.незав.

Тогда исх. система локально управляема на M_1 на $[t, t_1]$, $0 \le t < t_1$.

$\triangleright$ $\exists \varepsilon > 0: S_\varepsilon(0) \subset Z(t, t_1, \{0\})$ – хотим

1,2 $\Rightarrow$ и лемма о внутр. точке инт-ла.

$\exists \varepsilon > 0: S_\varepsilon(0) \subset \int_0^{t_1 - t} e^{-sA} \{-v, v\} ds \subset \int_0^{t_1 - t} e^{-sA} [-v, v] ds \equiv$

$\equiv Z(t, t_1, \{0\})$

$\square$

<u>теор2</u> 1) $M_0 \in \Omega(E^n)$, $M_1 = \{0\}$.

2) $\exists v \in U: -v \in U$, $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ – лин. незав.

3) $(x(t), u(t))$ – допуст. пара на $[t_0, t_1]$ – уд-т ПМП.

Тогда $(x(t), u(t))$ – оптим. решение на $[t_0, t_1]$.

$\triangleright$ т1 сист.л.у. на M_1 на $[t, t_1]$, $t \in [t_0, t_1)$ $\Rightarrow$ Т. о дост. усл. лок. опт. $\Rightarrow$ $(x(t), u(t))$ – опт. пара.

$\square$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) = M_0 \\ x(t_1) = 0. \\ t_1 - t_0 \to \min\limits_{|u| \le 1} \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$U = \{(u_1, u_2)^T, u_1 = 0, |u_2| \le 1\}$

$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $-v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in U$

$AV=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad V, AV$ — л.н. $\Rightarrow$ исх сист. л.у.

$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

AV с V - лин.незав. аналогично

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $\quad b\neq 0 \Rightarrow$ лин.незав.

$\dot x = u$, $x,u\in E^2$

$U=S_1(0)$ $\quad A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$M_1=\{0\}$ $\quad \forall v\in U$, v, Av - лин.зав.

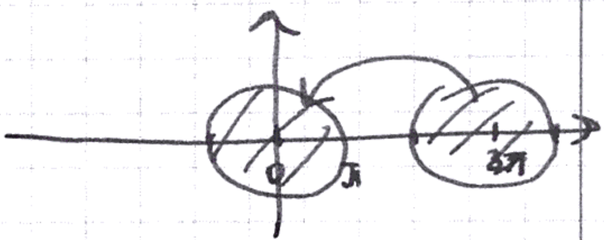
$Z(t,t_1,\{0\}) = S_{t_1-t}(0)$

<u>пример</u> $\quad \dot x_1 = x_2+u_1$

$\dot x_2 = x_1+u_2$ $\quad A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

$x(0)\in S_\pi\left(\begin{pmatrix}3\pi\\0\end{pmatrix}\right)$

$x(t_1)\in S_\pi\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)$



$t_1 \to \min\limits_{u\in\Omega_u}$

1) $(u(t),\psi(t)) = C(U,\psi(t))\ \forall t\in[t_0,t_1]$.

2) $(x(0),\psi(0)) = C(M_0,\psi(0))$

3) $(x(t_1),-\psi(t_1)) = C(M_1,-\psi(t_1))$

$C(M_0,\psi) = 3\pi\psi_1 + \|\psi\|\pi$

$C(M_1,\psi) = \pi\|\psi\|$

$C(U,\psi) = \|\psi\|$

$(u(t),\psi(t)) = \|\psi(t)\|$

$u(t)=\dfrac{\psi(t)}{\|\psi(t)\|}$ $\quad \dot\psi = A^*\psi \Rightarrow \psi(t)=e^{-tA^*}\psi(0) = e^{tA}\psi(0)$

$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = -A^*$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \psi(0).$$

copybook

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{pmatrix} \Rightarrow \psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_{10}\cos t + \psi_{20}\sin t \\ -\psi_{10}\sin t + \psi_{20}\cos t \end{pmatrix}$$

$$\|\psi(t)\|^2 = \psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)$$

$$\psi_{10}^2\cos^2 t + 2\underline{\psi_{10}\psi_{20}\cos t\sin t} + \psi_{20}^2\sin^2 t + \psi_{10}^2\sin^2 t + \psi_{20}^2\cos^2 t -$$

$$-2\underline{\psi_{10}\sin t\,\psi_{20}\cos t} = \psi_{10}^2 + \psi_{20}^2 = \|\psi(0)\|^2.$$

$$\psi(t) \in S \Rightarrow \|\psi(t)\| = 1 \Rightarrow u(t) = \psi(t).$$

применим усл 2:

$$② \Rightarrow x(0) = \begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} + \pi\psi(0)$$

$$③ \Rightarrow x(t_1) = -\pi\psi(t_1)$$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ u(t)}}{\psi(t)} = e^{-tA^*}\psi(0)$$

$$① \Rightarrow u(t) = \psi(t), \ \|\psi(t)\| = 1.$$

$$x(t) = e^{tA}\left(x(0) + \int_0^t e^{-sA}u(s)\,ds\right) = e^{tA}\left(\begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} + \pi\psi(0) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \underbrace{e^{-sA}e^{-sA^*}}_{E}\psi(0)\,ds\right) = e^{tA}\left(\begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} + \pi\psi(0) + t\psi(0)\right)$$

$$x(t_1) = -\pi\psi(t_1) = e^{t_1A}\left(\begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} + (\pi + t_1)\psi(0)\right) \Leftrightarrow$$

$$-\pi e^{-t_1A^*}\psi(0) = e^{t_1A}\left(\begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} + (\pi + t_1)\psi(0)\right) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{-\begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} = (2\pi + t_1)\psi(0)}.$$

$$-\pi\psi(0) = \begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} + (\pi + t_1)\psi(0)$$

$$-\begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} = (2\pi + t_1)\psi(0)$$

$$3\pi = |2\pi + t_1| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \pi \\ t_1 = -\pi \end{array}\right.$$

copybook

$$\Rightarrow \quad \psi(0)=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\psi(t_1)=\psi(\pi)=e^{-\pi A^*}\psi(0)=-E\,\psi(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

$$x(0)=\begin{pmatrix}3\pi\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\pi\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\pi\\0\end{pmatrix}$$

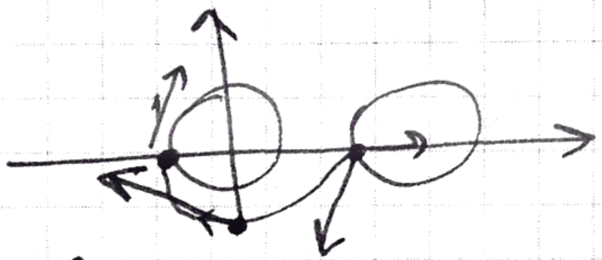
$$x(\pi)=\cancel{}-\pi\,x(0)=\begin{pmatrix}-\pi\\0\end{pmatrix}$$

$$\psi(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos t\\ +\sin t\end{pmatrix}=u(t)$$

$$x(t)=e^{tA}\left(\begin{pmatrix}3\pi\\0\end{pmatrix}+\pi\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)=$$

$$=(2\pi-t)\,e^{tA}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(2\pi-t)\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\end{pmatrix}$$

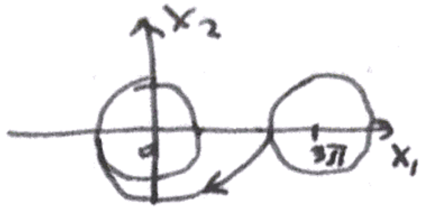
$$\dot{x}(0)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\pi\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\pi\end{pmatrix}$$



$$x\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}0\\-\pi/2\end{pmatrix} \qquad \dot{x}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{3\pi}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$\dot{x}(\pi)=\begin{pmatrix}1\\\pi\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u_2 \\ x(0) \in S_{\pi}\left(\begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ x(t_1) \in S_{\pi}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ t_1 \to \min \end{cases}$$



$\mathcal{U} = S_1(0)$.

$$X(t) = S_{\pi+t}(a(t))$$

$$a(t) = 3\pi \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

$X(t) \cap M_1 = \varnothing$, $t < \pi$

$X(\pi) \cap M_1 \neq \varnothing$. $t_1 = \pi$. $X(\pi) \cap M_1 = \left\{\begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$X(\pi) = S_{2\pi}\begin{pmatrix} -3\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x(\pi) = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix}$

$\psi(\pi) = -\frac{1}{\pi} x(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\psi(\pi) \to \psi(0) \to \psi(t)$

$u(t) \equiv \psi(t)$

$Z(t, \pi, M_1) = S_{2\pi-t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ $\quad t \in [0, \pi]$

$X(t) \cap Z(t) = \{x(t)\}$

$x(t) = e^{tA}\left(x_0 + \int_0^t \ldots\right)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ x(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ t_1 \to \min \\ \mathcal{U} = \{u \in E^2, u_1 = 0, |u_2| \le 1\} \end{cases}$$

классич. задача. хотим перенести в начало и остановить.

$(u(t), \psi(t)) = c(\mathcal{U}, \psi(t)) \quad \forall t \in [0, t_1]$

$c(\mathcal{U}, \psi) = |\psi_2|$

$\psi_2(t) u_2(t) = |\psi_2(t)|$

$$u_2(t) = \begin{cases} 1, & \psi_2(t) > 0 \\ -1, & \psi_2(t) < 0 \\ [-1,1] & \psi_2(t) = 0 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad -A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\dot\psi = -A^* \psi$

$\begin{cases} \dot\psi_1 = 0 \\ \dot\psi_2 = -\psi_1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\psi_1(t) = const = \psi_1(0), \\ &\psi_2(t) = -\psi_1(0)\, t + \underset{\psi_2(0)}{\underset{\parallel}{const}} \end{aligned}$

$t \in (\alpha, \beta)^{\alpha < \beta} \qquad \psi_2(t) = 0$

$-\psi_1(t)\, t + \psi_2(t) = 0 \overset{\text{от.А}}{\Leftrightarrow} \psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$

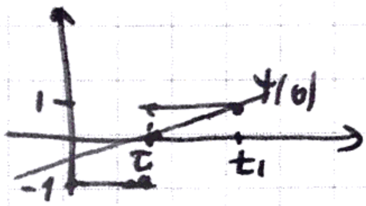
$\psi_1(t) \equiv 0$

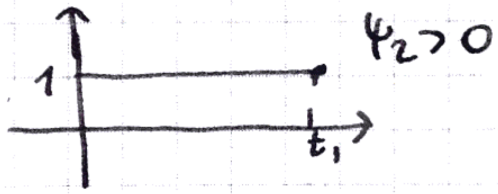
$\psi_2(t) \equiv 0$

$\psi(t) \equiv 0$ – противоречит ПМП.

$\psi(0) \neq 0 \Rightarrow \psi_2(t)$ на $\forall$ отрезке $[0, t_1]$ имеет не более Φ нуля.

1) ψ_2 принимает только 2 значения ± 1.
2) опт. управл. имеет не более 1 точки перекл.





ещё \ и -1.

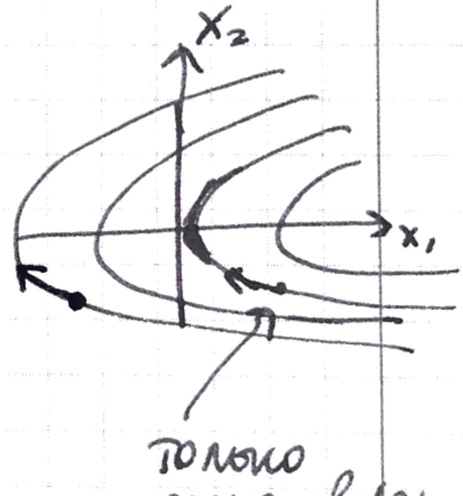
1. $u_2(t) = 1$

$\dot x_1 = x_2$

$\dot x_2 = u_2 = 1$

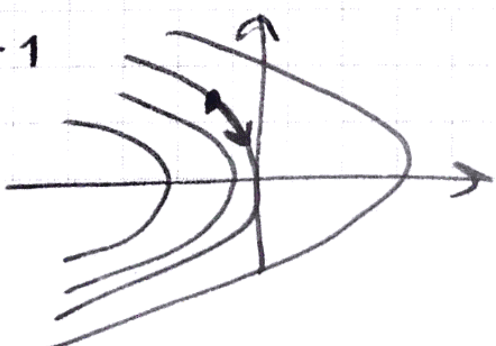
$\dfrac{dx_1}{dx_2} = x_2 \Rightarrow x_1 = \dfrac{x_2^2}{2} + C$

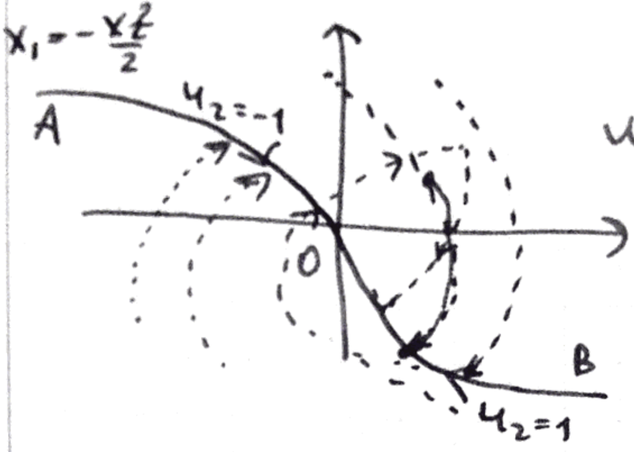
$\dot x_2 > 0 \Rightarrow x_2 \nearrow$



2. $u_2 = -1$

$\Rightarrow$





линия переключения

нельзя попасть, переключившись 1 раз.

$\Rightarrow$ <u>u_2 - в форме синтеза</u>

$u_2 = \begin{cases} +1, & \text{если точка выше } AOB \cup OB \\ -1, & \text{если точка ниже } AOB \cup AO \end{cases}$

$x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ - попробуем найти.

$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + c_2$

$a = -\frac{b^2}{2} + c \Rightarrow c_2 = a + \frac{b^2}{2}$

$\Rightarrow x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + a + \frac{b^2}{2}$ - начали двигаться по параболе.

ищем пересечение:

$\begin{cases} x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + a + \frac{b^2}{2} \\ x_1 = \frac{x_2^2}{2} \end{cases} \Rightarrow x_2^2 = a + \frac{b^2}{2}$

$x_2 = \pm\sqrt{a + \frac{b^2}{2}}$

$x_2 < 0 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{a + \frac{b^2}{2}}$

$T_{x_0 \to x_n} = (x_0)_2 - (x_2)_n = b + \sqrt{a + b^2/2} = \tau$

(момент переключения)

$T_{x_n \to \underline{\underline{0}}} = (x_{\underline{\underline{0}}})_2 - (x_n)_2 = 0 + \sqrt{a + \frac{b^2}{2}} = \sqrt{a + \frac{b^2}{2}}$

$T(a,b) = b + 2\sqrt{a + b^2/2}$

$T(-a,-b) = -b - 2\sqrt{-a + b^2/2}$

$T(a,b) = \begin{cases} b + 2\sqrt{a + b^2/2}, & \text{выше } AOB \\ -b - 2\sqrt{-a + b^2/2}, & \text{ниже } AOB \end{cases}$ $u_2(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \tau] \\ 1, & t \in [\tau, T_0] \end{cases}$

copybook

$\to \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u_2 - x_1 \\ x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ x(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ t_1 \to \min \\ U = \{ u \in E^n, u_1 = 0 \} \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ как и у тележки.

ПМ: $u_2(t) = \operatorname{sgn} \psi_2(t)$

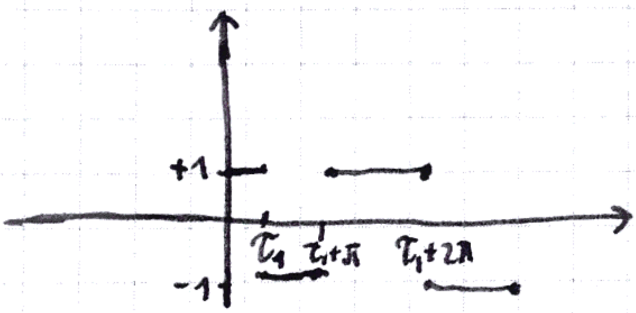
$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_2(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ \psi_1(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{cases}$$

$\psi_2(t) = 0 \Rightarrow t \in (\alpha, \beta) \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow \psi(t) \equiv 0.$

$\psi(0) \neq 0, \psi_2(0) \neq 0, \psi_2(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(t + \alpha).$

$\Rightarrow$ 1) ОУ принимает только ± 1.



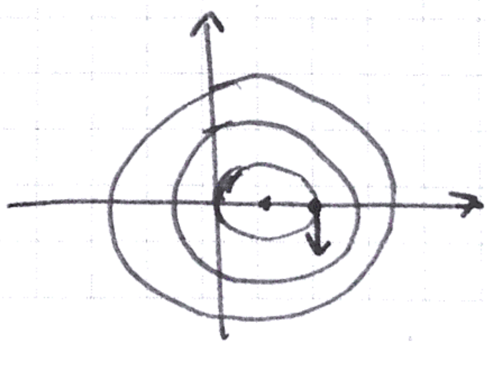
за счёт α можем сделать переключение в любой момент от 0 до π

определяем только 1-е переключение, далее всё фиксированно.

1. $u_2 = 1$

$x_2 dx_2 = (x_1 - 1)\, dx_1$

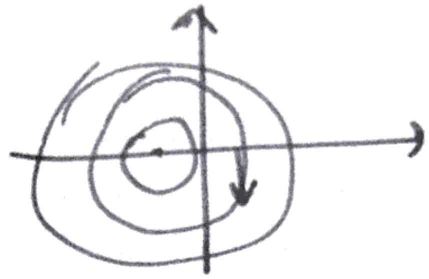
$x_2^2 + (x_1 - 1)^2 = C_1^2$



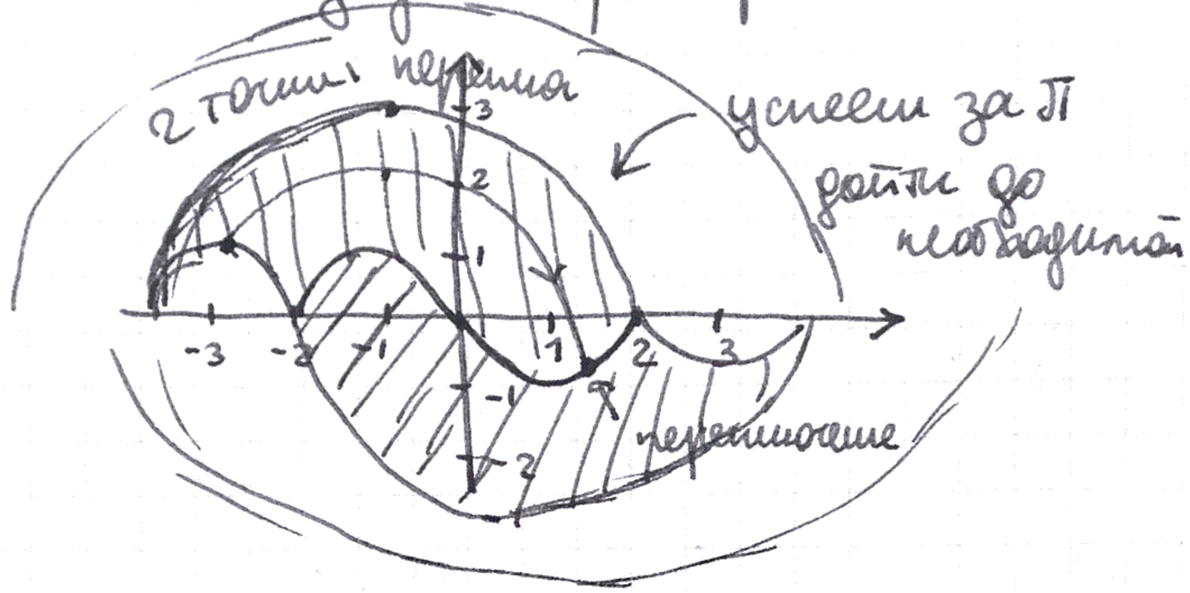
2. $u_2 = -1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(x_1+1) \end{cases}$$

$x_2^2 + (x_1+1)^2 = C_2^2$



снова без переключений только из одной траектории.



$\boxed{08.12.13}$

① $(\psi(t), \psi(t)) = C(U, \psi(t))$

② $(x(t_0), \psi(t_0)) = C(M_0, \psi(t_0))$

$F \in \Omega(E^n)$

$(f, \psi) = C(F, \psi)$

$F \in \text{conv}\, \Omega(E^n)$

опр 1 F наз-ся строго вып. в напр $\psi^0 \neq 0$, если U_{ψ_0} состоит из одной точки

опр 2 вып. F наз-ся строго вып, если он явл-ся строго выпуклым по $\forall \psi \in S$.

$F = S_1(0)$. - стр. вып.

$U_\psi = \{ f \in F : (f, \psi_0) = C(F, \psi_0) \}$

дост. на отрезке $\Rightarrow$ не строго вып.

теор 1 пусть в мин. зад. быстр. $U, M_0^{(M_1)}$ — стр. вып. мн-ва. Тогда $\forall \psi(t_0) \in E^n (\psi(t_1))$ реш. ур-й (1)-(2) из ПМП определяются единств. образом.

теор 2 пусть U — вып. компакт, $c(U, \psi) = c(\psi)$.
1) если в т. $\psi_0 \in E^n, \psi_0 \neq 0$ $\exists c'(\psi_0)$, то $U_{\psi_0} = \{c'(\psi_0)\}$.
2) если в т. $\psi_0 \in E^n, \psi_0 \neq 0$ $U_{\psi_0} = \{h_0\}$, то $\exists c'(\psi_0) = h_0$

следствие с.в. $\Leftrightarrow \exists c'(\psi), \forall \psi \in E^n \setminus \{0\}$.

~~Док-во~~ D ① $\psi_0 : \exists c'(\psi_0)$, $U_{\psi_0} \ni h_0$ берем $\forall h_0 \in U_{\psi_0}$. (ψ^0)

$(h_0, \psi^0) = c(\psi^0)$, $(h_0, \psi) \le c(\psi)$ $\forall \psi \in E^n$.

$G(\psi) = c(\psi) - (h_0, \psi) \ge 0$ $\forall \psi \in E^n$.

$G(\psi^0) = c(\psi^0) - (h_0, \psi^0) = 0$.

$\Rightarrow \psi^0$ - т. минимум G. $\Rightarrow G'(\psi^0) = 0$

$$\Rightarrow c'(\psi^0) - h_0 = G'(\psi^0) \Rightarrow h_0 = c'(\psi^0).$$

② $U_{\psi_0} = \{h_0\}$.
$\chi \in E^n$

$$\lim_{\lambda \to 0+} \frac{c(\psi^0 + \lambda\chi) - c(\psi^0)}{\lambda} = (h_0, \chi).$$

$\psi^0 \neq 0 \Rightarrow \psi^0 + \lambda\chi \neq 0$ (для малых λ).

$u_\lambda \in U_{\psi^0 + \lambda\chi}$

$\lambda = 0 \Rightarrow u_0 = h_0$.

$c(\psi^0 + \lambda\chi) = (u_\lambda, \psi_0 + \lambda\chi)$

$(u_\lambda, \psi^0) \le c(\psi_0) = (h_0, \psi^0)$ $\cdot(-1)$

$(h_0, \psi^0 + \lambda\chi) \le c(\psi^0 + \lambda\chi) = (u_\lambda, \psi^0 + \lambda\chi)$

$-(h_0, \psi^0) = -c(\psi_0) \le -(u_\lambda, \psi^0)$

$$\lambda(h_0, \chi) \le c(\psi^0 + \lambda\chi) - c(\psi^0) \le \lambda(u_\lambda, \chi)$$

$$0 \le \frac{c(\psi^0 + \lambda\chi) - c(\psi^0)}{\lambda} - (h_0, \chi) \le (u_\lambda - h_0, \chi)$$
$\lambda \to 0+$

? $u_\lambda \to h_0$

$\exists\, \varepsilon > 0: \ \exists\, \lambda_k \to 0, \ \exists K \ \forall k \geq K$

$\|u_{\lambda_k} - h_0\| > \delta.$

$u_{\lambda_k} \in \mathcal{U} \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$

$\Rightarrow u_{\lambda_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} v \in \mathcal{U}$

$$(\psi^0 + \lambda_k \chi, u_{\lambda_k}) = c(\mathcal{U}, \psi^0 + \lambda_k \chi) = c(\psi^0 + \lambda_k \chi)$$

$k \to +\infty$,

$(\psi^0, v) = c(\psi^0)$

$\Rightarrow v \in \mathcal{U}_{\psi^0} \Rightarrow v = h_0$ (т.к. 1 точка)

(?!)

$\Rightarrow \quad \lim \ldots = (h_0, \chi)$

но надо grad: $\quad c(\psi_0 + \Delta\psi) - c(\psi^0) = (c'(\psi^0), \Delta\psi) + o(\|\Delta\psi\|)$

$$\varphi(\Delta\psi) = \frac{c(\psi^0 + \Delta\psi) - c(\psi^0)}{\Delta\psi} - \left(h_0, \frac{\Delta\psi}{\|\Delta\psi\|}\right) \underbrace{\xrightarrow[\|\Delta\psi\| \to]{} 0}_{\text{тогда доказано.}}$$

Пусть это не так.

$\exists\, \Delta\psi_k, \ \|\Delta\psi_k\| \to 0, \ \Delta\psi_k \neq 0, \ \exists\, \varepsilon > 0, \ \exists K \ \forall k \geq K:$

$|\varphi(\Delta\psi_k)| \geq \varepsilon$

$\lambda_k = \|\Delta\psi_k\|, \quad \lambda_k > 0, \ \lambda_k \to 0.$

$\chi_k = \dfrac{\Delta\psi_k}{\|\Delta\psi_k\|} \in S \in \Omega(E^n) \Rightarrow$ можно выд. сх-ся п/п.

$\chi^k \to \bar{\chi} \in S.$

$$\pi_k = \varphi(\Delta\psi_k) = \frac{c(\psi^0 + \lambda_k \chi_k) - c(\psi^0)}{\lambda_k} - (h_0, \chi_k)$$

$$r_k = \frac{c(\psi^0 + \lambda_k \bar{\chi}) - c(\psi^0)}{\lambda_k} - (h_0, \bar{\chi}).$$

$\pi_k = \pi_k - r_k + r_k$

$|\pi_k| \le |\pi_k - \nu_k| + |\nu_k|$

↓ по перв. части (т.к. произв. по напр.)

$$|\pi_k - \nu_k| = \left| \frac{c(\psi^0 + \lambda_k x_k) - c(\psi^0 + \lambda_k \bar{x})}{\lambda_k} - (h_0, x_k - \bar{x}) \right| \le$$

опорн. ф-ция Липшиц по ψ

$$\le L \cdot \frac{\lambda_k \|x_k - \bar{x}\|}{\lambda_k} + \|h_0\| \|x_k - \bar{x}\| =$$

$$= \underbrace{(L + \|h_0\|)}_{\text{огр}} \underbrace{\|x_k - \bar{x}\|}_{\downarrow 0} \to 0.$$

$\Rightarrow \pi_k \to 0.$ (?!) $\Rightarrow \exists$ grad. $\Box$.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 = E^n \\ t_1 - t_0 \to \min \end{cases}$$

$\leftarrow$ тогда бессмысл.

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \\ [t_0, t_1] - \text{фикс.} \\ \varphi(x(t_1)) \to \min \end{cases}$$

лин. задача оптимального управления с терминальным функционалом.

$\varphi(x) = \|x\|^2$

$\varphi(x) = (x, a)$

$\varphi(x) = \|x - a\|^2$

$\varphi(x) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$

теор 1. 1) $M_0 \in \Omega(E^n)$, $\mathcal{U} \in \Omega(E^n)$
2) $\mathcal{D}_1$ – измеримая ф-ция
3) φ непр-на в E^n.

$\Rightarrow$ в зад II $\exists$ оптим. решение

Δ $$X(t, t_0, M_0) = e^{(t-t_0)A} M_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t-s)A} \mathcal{U} ds$$

$t \in [t_0, t_1]$ $X(t, t_0, M_0) \in \Omega(E^n)$

$X(t_1) = X(t_1, t_0, M_0) \in \Omega(E^n)$

$\varphi(x)$ имеет минимум на $X(t_1) \Rightarrow \exists$ опт. реш. $\square$

замеч. 3) достаточно, чтобы φ была полунепр-на снизу.

$\underline{\lim}_{x_i \to x} \varphi(x_i) \geq \varphi(x)$

ПМП

Деф пара $(u(t), x(t))$, $t \in [t_0, t_1]$. уд-т ПМП, если для $\psi(t)$: $\begin{cases} \dot\psi(t) = -A^* \psi \\ \psi(t_1) = -\varphi'(x(t_1)) \end{cases}$

1) $(u(t), \psi(t)) = C(\mathcal{U}, \psi(t))$ $\forall t \in [t_0, t_1]$

2) $(x(t_0), \psi(t_0)) = C(M_0, \psi(t_0))$

лемма 1. 1) $X \in \mathrm{conv}\,\Omega(E^n)$

2) $\varphi(x)$ непр-на диф-ма в E^n

3) x_* – т. наиб. минимума $\varphi(x)$ на X: $\varphi(x) \geq \varphi(x_*)$ $\forall x \in X$

тогда $(\varphi'(x_*), x - x_*) \geq 0$ $\forall x \in X$

Δ $\forall x \in X$, $x_* \in X \Rightarrow [x, x^*] \in X$

$\lambda x_* + (1-\lambda)x \in X$. $\forall \lambda \in [0,1]$. $x_* + \lambda(x - x_*) \in X$

$$\varphi(x_* + \lambda(x - x_*)) - \varphi(x_*) \geq 0$$

$$\varphi(x_*) + \lambda(\varphi'(x_*), x - x_*) + \bar{o}(\lambda) - \varphi(x_*) \geq 0$$

$$(\varphi'(x_*), x - x_*) \geq 0 \quad \square.$$

теор (ПМП, необх усл. опт.)

1) $M_0 \in \mathrm{conv}\,\Omega(E^n)$, $\mathcal{U} \in \Omega(E^n)$.

2) $\varphi(x)$ – непр диф-ма в E^n

3) $(u(t), x(t))$ – опт. пара. зад II.

$\Rightarrow$ $(u(t), x(t))$ – удовл. ПМП с $\psi(t)$.

$X(t_1) \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$

$x(t_1) \in X(t_1)$ – т. глоб. минимума

1 случай: $x(t_1) \in \operatorname{int} X(t_1) \Rightarrow \varphi'(x(t_1)) = 0. \Rightarrow$

$\Rightarrow \psi(t) \equiv 0 \Rightarrow$ ПМП.

2 случай. $x(t_1) \in \partial X(t_1)$

а) $\varphi'(x(t_1)) = 0$ тогда 1 случай и ПМП

б) $\varphi'(x(t_1)) \neq 0$

в силу леммы $(\varphi'(x(t_1)), x - x(t_1)) \geq 0$

$\forall x \in X.$ (Т)

$$(\underbrace{-\varphi'(x(t_1))}, x - x(t_1)) \leq 0$$

$$(\psi(t_1), x - x(t_1)) \leq 0$$

$$(\psi(t_1), x(t_1)) \geq (\psi(t_1), x) \quad \forall x \in X$$

$$(\psi(t_1), x(t_1)) = c(X(t_1), \psi(t_1))$$

по лемме о сопр. перем.

$$(x(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} (u(s), \psi(s))\, ds = c(M_0, \psi(t_0)) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} c(U, \psi(s))\, ds =$$

$$= [c(M_0, \psi(t_0)) - (x(t_0), \psi(t_0))] + \int_{t_0}^{t} [c(U, \psi(s)) - (u(s), \psi(s))]\, ds$$

$\geq 0.$

□